6.3 Orthogonale und unitäre Abbildungen

a) Längen- und Winkeltreue

Welche linearen Abbildungen erhalten Längen bzw. Abstände und/oder Winkel? Drehung, Spiegelung, ...

<u>Def.:</u> Seien V und W K-Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ und induzierten Metriken d_V und d_W. Eine Abbildung $f: V \to W$ heißt **Isometrie**, falls $d_V(u,v) = d_W(f(u),f(v))$ für alle $u,v \in V$. Wir nennen f **orthogonal** $(K=\mathbb{R})$ bzw. **unitär** $(K=\mathbb{C})$, falls

$$\langle u,v\rangle_V = \langle f(u), f(v)\rangle_W \quad \text{für alle } u,v \in V,W.$$

<u>Bem.:</u>

(1) Eine Isometrie ist injektiv.

<u>Bew.:</u> $f(u)=f(v) \Rightarrow 0 = d_W(f(u),f(v)) = d_V(u,v) \Rightarrow u=v.$ $\square$

(2) Für eine Isometrie f mit $f(0)=0$ gilt: z.B. f linear

$$\|v\|_V = \|f(v)\|_W. \qquad \text{(normerhaltend)}$$

<u>Bew.:</u> $\|v\| \underset{\text{induzierte Metrik}}{=} d(v,0) \underset{\text{Isometrie}}{=} d(f(v),f(0)) = \|f(v) - \underbrace{f(0)}_{0}\| = \|f(v)\|.$ $\square$

(3) Für eine Abbildung $f: V \to W$ sind äquivalent:

(i) f ist orthogonal / unitär,

(ii) f ist linear und isometrisch.

Bew.:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Linearität, d.h. $f(v+\lambda w) = f(v) + \lambda f(w)$:

$$\|f(v+\lambda w) - f(v) - \lambda f(w)\|^2 = \langle \dots, \dots \rangle$$

$$\overset{1}{=} \|f(v+\lambda w)\|^2 + \|f(v)\|^2 + |\lambda|^2 \|f(w)\|^2$$
$$- 2\,\mathrm{Re} \langle f(v+\lambda w), f(v) \rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\lambda \langle f(v+\lambda w), f(w) \rangle$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\,\lambda \langle f(v), f(w) \rangle$$
$$\overset{2}{=} \|v+\lambda w\|^2 + \|v\|^2 + |\lambda|^2 \|w\|^2 - 2\,\mathrm{Re} \langle v+\lambda w, v+\lambda w \rangle$$
$$- 2\,\mathrm{Re}\,\lambda \langle v, w \rangle \overset{3}{=} \|v+\lambda w - v - \lambda w\|^2 = 0$$

[1] Linearität $\langle .,. \rangle$, [2] Orthogonalität, [3] Linearität rückwärts

$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,\mathrm{Re} \langle a, b \rangle$.

Isometrie folgt aus $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ und $d(u,v) = \|u - v\|$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): mit (2) und der Polarisationsformel für $\langle .,. \rangle$ folgt, daß auch $\langle .,. \rangle$ invariant unter f ist. $\square$

(4) Ist $\dim V < \infty$, dann ist eine Isometrie $f \in \mathrm{End}(V)$ stets auch ein Isomorphismus. Die Umkehrung f^{-1} ist ebenfalls eine Isometrie.

Bew.: für $\dim V < \infty$ ist injektiv gleichbedeutend mit bijektiv. Mit $w = f(v)$ gilt

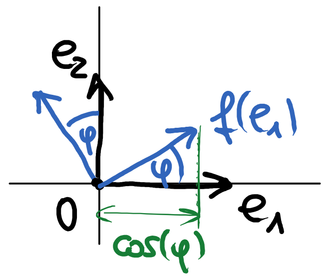
$\|f^{-1}(w)\| = \|v\| = \|f(v)\| = \|w\|$ für alle $w \in V$. $\square$

(5) Beispiele für $f \in \mathrm{End}(V)$:

- Trivialbeispiel: $f = \mathrm{id}_V$ (Identität)
- $f(v) = -v$ (Inversion an $x=0$)
- $V = \mathbb{R}^2$: $f(v) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} v$ (Drehung um φ)

$\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$f\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$



$$g(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$ (Spiegelung an Gerade $v_1 = 0$)

- $V = L^2(\mathbb{C})$ – quadratintegrable komplexe Funktionen: die Fouriertransformation $\psi \mapsto \hat{\psi}$ mit
$\hat{\psi}(k) := \int e^{-ikx} \psi(x)\, dx$ ist eine Isometrie, d.h.
$$\int |\psi(x)|^2 dx = \int |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{(2\pi)^n}$$ (Parseval-Plancherel)

(6) die Translation $f(x) = x + a$ ist längentreu, also isometrisch, aber <u>nicht</u> orthogonal, da nicht linear.

(7) jede orthogonale Abbildung ist winkeltreu, d.h.
$$\cos \sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \cos \sphericalangle(f(u), f(v)).$$

Die Umkehrung gilt nicht, z.B. Drehstreckung.

(8) die Koordinatenabbildung $\Phi_B : K^n \to V$ zur Orthonormalbasis $B = (v_1, \dots, v_n)$ ist eine Isometrie.

Bew.: $x, y \in K^n$.

$$\underbrace{\langle \Phi_B(x), \Phi_B(y) \rangle}_{\text{in } V} = \left\langle \sum_i x_i v_i, \sum_j y_j v_j \right\rangle = \sum_{ij} \overline{x_i} y_j \overbrace{\langle v_i, v_j \rangle}^{\delta_{ij}}$$

$$= x^T y = \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\text{in } K^n} \qquad \square$$

Folgerung: Alle endlichdimensionalen Vektorräume sind isometrisch isomorph zu K^n.

6) Orthogonale und unitäre Gruppen

Bem.: Die Komposition orthogonaler/unitärer Abbildungen ist orthogonal/unitär.

Bew.: $f : U \to V$, $g : V \to W$, $h = g \circ f$.

$$\langle h(u), h(u') \rangle = \langle g(f(u)), g(f(u')) \rangle = \langle f(u), f(u') \rangle = \langle u, u' \rangle.$$

$\square$

Satz: Sei V ein Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und Orthonormalbasis B. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, falls die darstellende Matrix $M_B(f) \in \mathrm{End}(K^n)$ orthogonal bzw. unitär ist.

Bew.: $M_B(f) = \Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_B$ und Φ_B ist orthogonal. $\square$

Satz: Eine Matrix $A \in GL(n;K)$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, falls
$$A^{-1} = A^T \ (K=\mathbb{R}) \quad \text{bzw.} \quad A^{-1} = \overline{A}^T \ (K=\mathbb{C}).$$

Bew.: A unitär $\Leftrightarrow (\overline{Ax})^T(Ay) = \overline{x}^T y$ für alle $x,y \in \mathbb{C}^n$
$\Leftrightarrow \overline{x}^T(\overline{A}^T A)\, y = \overline{x}^T y$ für alle x,y (z.B. $e_1, \dots, e_n$)
$\Leftrightarrow \overline{A}^T A = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow A^{-1} = \overline{A}^T.$ $\square$

Korollar: Für $f \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal/unitär ist $|\det f| = 1$, die Transformation f ist volumentreu.

Bew.: Sei $A = \det M_B(f)$, dann ist $\det f = \det A$.
$$1 = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det \overline{A}^T) = (\det A)\,\overline{(\det A)}$$
$$= |\det A|^2.$$
volumentreu: $\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$
$$|\det(f(v_1), \dots, f(v_n))| = |\det f| \cdot |\det(v_1, \dots, v_n)| \qquad \square$$
vgl. $(Av_1, \dots, Av_n) = A(v_1, \dots, v_n)$

Korollar 2: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, falls ihre Spalten (Zeilen) eine Orthonormalbasis des K^n sind.
(Kriterium, um Orthogonalität von A zu testen)

Bew.: $A = (a_1, \dots, a_n)$. $\overline{a}_i^T a_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow \overline{A}^T A = \mathbb{1}$.
Für die Zeilen folgt $A\overline{A}^T = \mathbb{1}$. $\square$

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$. Als Untergruppen der invertierbaren $n \times n$-Matrizen $GL(n;K)$ definieren wir:

$O(n) := \{A \in GL(n;\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$, orthogonale Gruppe

$U(n) := \{A \in GL(n;\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A}^T\}$, unitäre Gruppe

$SL(n;K) := \{A \in GL(n;K) \mid \det A = 1\}$, spezielle lineare Gruppe

$SO(n) := O(n) \cap SL(n;\mathbb{R})$, spezielle orthogonale Gruppe

$SU(n) := U(n) \cap SL(n;\mathbb{C})$. spezielle unitäre Gruppe

Bem.:

(1) diese Mengen sind tatsächlich Untergruppen.

Bew.: für $U(n)$: $A, B \in U(n) \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A = \overline{(A^{-1})}^T$,

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \overline{B}^T\overline{A}^T = \overline{(AB)}^T \Rightarrow A^{-1}, AB \in U(n)$.

für $SL(n;K)$ aus Determinantenmultiplikationssatz. $\square$

(2) die Abbildungen in $SO(n)$ sind orientierungstreu

$\Rightarrow$ Drehungen im $\mathbb{R}^n$.

(3) Für $A \in O(n)$ ist $\det A = \pm 1$, da $\det A \in \mathbb{R}$.

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det A = ad - bc = \pm 1$

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det A}}_{\pm} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \overset{!}{=} A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{(orthogonal)}$$

$\Rightarrow a = \pm d,\ b = \mp c;\ a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow |a|, |c| \leq 1$.

Zu a, c gibt es genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Drehspiegelung}}$$