4 Lineare Abbildungen

VL #14

4.1 Homomorphismen

a) Definitionen

<u>Motivation:</u> $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$,
$\Rightarrow$ Abbildung zwischen Vektorräumen

<u>Erinnerung:</u>

(1) Gruppen $(G, *)$ und $(H, \cdot)$, $f: G \to H$ ist ein Homomorphismus, falls $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in G$.

(2) Körper $(K, +, \cdot)$ $\Rightarrow$ $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen. $f: K \to \tilde{K}$ heißt Körperhomomorphismus, falls

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ und } f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \quad a, b \in K$$

„f vertauscht mit den Verknüpfungen auf G bzw. K."

(3) Verknüpfungen auf einem Vektorraum: Addition und Skalarmultiplikation

<u>Def.:</u> Eine Abbildung $f: V \to W$ zwischen K-Vektorräumen V und W heißt Vektorraum-Homomorphismus oder K-lineare Abbildung, falls für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

(L1) $f(v+w) = f(v) + f(w)$, Additivität

(L2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Homogenität

Bem.:

(4) Die Bedingungen (L1) und (L2) sind äquivalent zu

(L) $f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$, $\quad v, w \in V, \lambda \in K$.

Bew.: (L) $\Rightarrow$ (L1) für $\lambda = 1$, (L) $\Rightarrow$ (L2) für $w = 0$.

umgekehrt: $f(\lambda v + w) \overset{(L1)}{=} f(\lambda v) + f(w) \overset{(L2)}{=} \lambda f(v) + f(w)$. $\square$

(5) Folgerung: eine lineare Abbildung $f: V \to W$ vertauscht mit Linearkombinationen:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \quad \text{für alle } \lambda_i \in K, v_i \in V.$$

(6) es gilt auch: $\underset{\lambda = -1}{f(v-w) = f(v) - f(w)}$ und $\underset{v = w}{f(0) = 0}$

Vorsicht: $f(v) = 0$ heißt nicht zwingend, daß $v = 0$!

(7) Ist die Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V linear abhängig, so ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ in W linear abhängig.

Falls f injektiv ist, so gilt auch die Umkehrung.

Bew.: $\sum_i \lambda_i v_i = 0$, wobei ein $\lambda_i \neq 0$

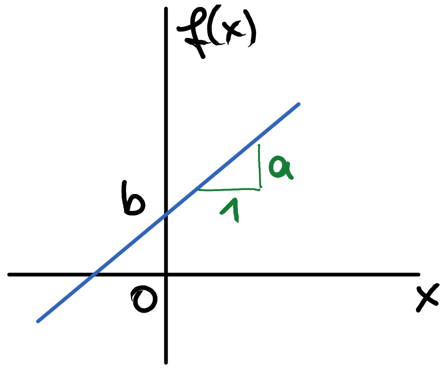
$\overset{(6)}{\Longrightarrow} f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = 0 \overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \sum_i \lambda_i f(v_i) = 0$

Umkehrung für f injektiv: $f(w) = 0 \Rightarrow w = 0$ $\square$

b) Beispiele

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = ax + b$

$y = f(x)$: Gerade durch $(0,b)$



f ist nur dann linear, wenn $b = 0$:

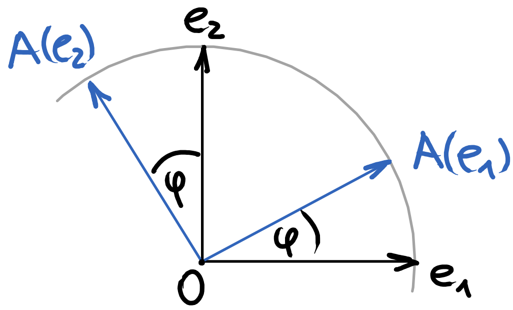
$f(x) = ax$

Denn: $f(\lambda x + x') = a(\lambda x + x') = \lambda(ax) + ax' = \lambda f(x) + f(x')$.

(2) Drehung um Ursprung mit dem Winkel φ:

Sei $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear.

Es gelte $A(0) = 0$ und für die Basisvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$:



$$A(e_1) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$$

$$A(e_2) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$$

Folglich für allgemeines $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$:

$$A(x) = x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2)$$

$$= (x_1 \cos(\varphi) - x_2 \sin(\varphi),\ x_1 \sin(\varphi) + x_2 \cos(\varphi))^T$$

„Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren bestimmt."

Wir können A durch eine Matrix darstellen:

$$A(x) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} A(e_1) & A(e_2) \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(3) Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix. Dann ist die Abbildung

$$f: K^n \to K^m, \quad x \mapsto Ax \qquad \text{linear.}$$

Bew.: $f(\lambda x+y) = A(\lambda x+y) = A(\lambda x) + Ay$

$$= \lambda(Ax) + Ay = \lambda f(x) + f(y) \quad \square$$

Es gilt: $A = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$

„Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Basisvektoren."

(4) die Transposition $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$, $A \mapsto A^T$ ist linear:

$$(\lambda A+B)^T = (\lambda A)^T + B^T = \lambda A^T + B^T \quad [\to \S 3.2(2)]$$

(5) ein Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht linear.

$$f(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 f(x) \neq \lambda f(x) \quad \text{für } \lambda \neq 0, 1.$$

(6) Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die stetigen und beschränkten Funktionen auf I bilden den Vektorraum $C_b(I;\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^I$. Das Integral auf $C_b(I;\mathbb{R})$ ist eine lineare Abbildung:

$$S: C_b(I;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bew.: $S(\lambda f+g) = \int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]\,dx$

$$= \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \lambda S(f) + S(g). \quad \square$$

(7) Die Ableitung ist auch eine lineare Abbildung:

$$D: C^\infty(I;\mathbb{R}) \to C^\infty(I;\mathbb{R}), \quad f \mapsto f'.$$

$\{f: I \to \mathbb{R}$, beliebig oft differenzierbar$\}$ $\quad D(\lambda f+g)(x) = \lambda f'(x) + g'(x).$

c) Bild, Fasern, und Kern

Welche innere „Struktur" bzw. „Mechanik" besitzt eine lineare Abbildung $f: V \to W$? Wie sieht die Transformation von V unter f aus?

<u>Vorbemerkung:</u> Seien $f: V \to W$ eine lineare Abbildung und $V' \subset V$ und $W' \subset W$ Untervektorräume. Dann sind auch $f(V') \subset W$ und $f^{-1}(W') \subset V$ Untervektorräume.

Urbild

<u>Bew.:</u> (→ Übung)

i) $0 \in V' \Rightarrow f(0) = 0 \in f(V') \Rightarrow f(V') \neq \emptyset$.

ii) Sei $w_1, w_2 \in f(V')$. Dann gibt es $v_1, v_2 \in V'$ mit $w_i = f(v_i)$.

$\Rightarrow w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \in f(V')$

iii) Für $\lambda \in K$ gilt: $\lambda w_1 = \lambda f(v_1) = f(\lambda v_1) \in f(V')$, da $\lambda v_1 \in V'$.

Also ist $f(V') \subset W$ ein Untervektorraum.

Teil 2: i) $0 \in f^{-1}(W') \neq \emptyset$ da $f(0) = 0 \in W'$.

ii) Sei $v_1, v_2 \in f^{-1}(W')$, d.h. $f(v_1), f(v_2) \in W'$. Dann gilt

$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \in W'$, also $v_1 + v_2 \in f^{-1}(W')$.

$f(\lambda v_1) = \lambda f(v_1) \in W' \Rightarrow \lambda v_1 \in f^{-1}(W')$. $\square$

Def.: Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir nennen

$\operatorname{im} f := f(V)$ das Bild von f,

$f^{-1}(w) := \{v \in V \mid f(v) = w\}$ die Faser über $w \in W$, und

$\ker f = f^{-1}(0)$ den Kern von f.

Urbild von $\{w\}$

Bem.:

(1) $\operatorname{im} f \subset W$ und $\ker f \subset V$ sind Untervektorräume.

(Folgt aus Vorbemerkung, $\{0\} \subset W$ ist Unterraum.)

(2) f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\operatorname{im} f = W$

(Definition „surjektiv")

(3) f injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$

Bew.: $\Rightarrow$: aus Def. „injektiv"

$\Leftarrow$: Sei $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Dann ist $f(v - v') = 0$, also $v - v' \in \ker f = \{0\}$. Also $v = v'$. $\square$

(4) Sei $f: X \to Y$ eine beliebige Abbildung zwischen Mengen. Die Fasern von f zerlegen X in disjunkte Teilmengen:

$$X = \dot\bigcup_{y \in \operatorname{im} f = f(X)} f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \text{ Partitionierung von } X$$

Bew.: die Vereinigung ist disjunkt, da ein $x \in X$ nicht auf zwei verschiedene $y \in f(X)$ abgebildet werden kann. $f^{-1}(y) \subset X$ nach Def. „Urbild". Zu jedem $x \in X$ gibt es $y \in \operatorname{im} f$ mit $x \in f^{-1}(y)$, nämlich $y = f(x)$ $\Rightarrow X \subset$ r.S. $\square$

(5) Seien $f: V \to W$ linear und $w \in \operatorname{im} f$. Dann gilt für alle $v \in f^{-1}(w)$: $f^{-1}(w) = v + \ker f$
$= \{v + u \mid u \in \ker f\}$.

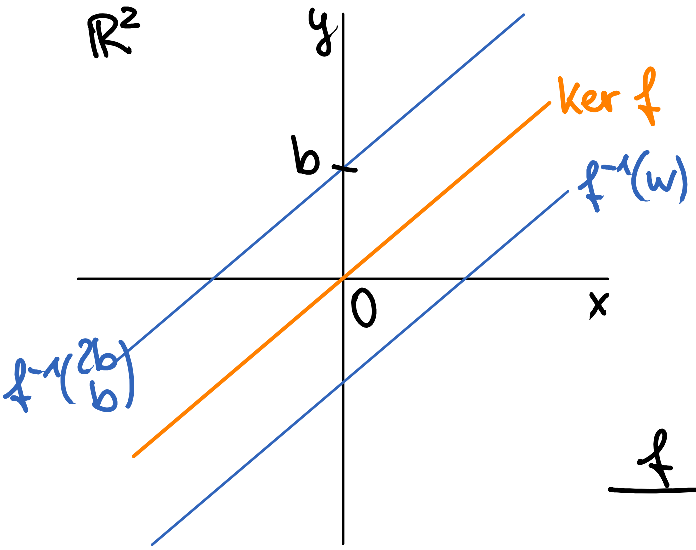
Bew.: Sei $v' \in f^{-1}(w)$. Wegen $f(v) = f(v')$ folgt $f(v'-v) = 0$, also $u := v' - v \in \ker f$. $\Rightarrow v' = v + u \Rightarrow f^{-1}(w) \subset v + \ker f$.
Ist $v' \in u + \ker f$, so ist $f(v') = f(u) + 0 = w \Rightarrow v' \in f^{-1}(w)$. □

VL #15

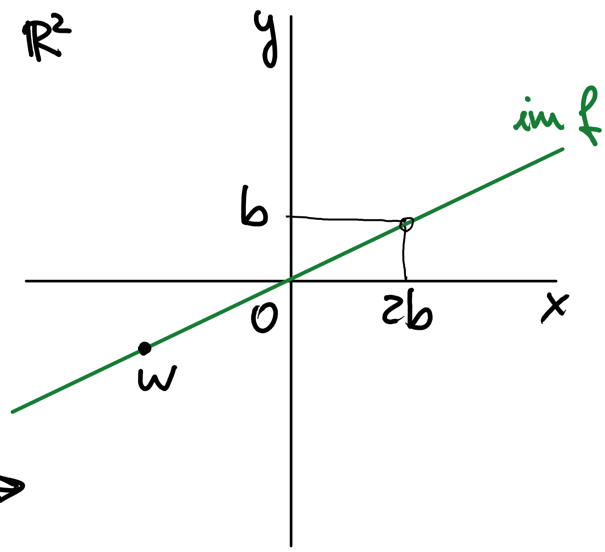
(6) Beispiel: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \overbrace{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{im} f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2(y-x) \\ y-x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker f = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \text{Lös}(A \mid 0)$$



$\xrightarrow{f}$



Die Faser zu $(2b, b)^T \in \operatorname{im} f$ ist die Gerade $y = x + b$:

$$f^{-1}\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(\lambda, b+\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Lös}\left(A \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 2b \\ b \end{smallmatrix}\right)$$

$\Rightarrow$ parallele Geraden mit Steigung 1,
$\ker f$ ist einzige Faser durch den Ursprung.

<u>Def.:</u> Eine Teilmenge X eines K-Vektorraums V heißt **affiner Unterraum**, falls es ein $v_0 \in V$ und einen Untervektorraum $U \subset V$ gibt, so daß

$$X = v_0 + U := \{ v_0 + u \mid u \in U \}.$$

Die leere Menge $\emptyset$ ist auch ein affiner Unterraum.

Als **Dimension** von X definieren wir $\dim X := \dim U$.

<u>Bem.:</u>

(?) der Untervektorraum U ist eindeutig bestimmt, der Aufhängepunkt v_0 kann beliebig aus X gewählt werden:

Sei $X = v_0 + U \subset V$ ein affiner Unterraum. Dann gilt:

i) Für $x \in X$ beliebig, ist $X = x + U$.

ii) Sind $v \in V$ und $U' \subset V$ ein Untervektorraum mit $v + U' = v_0 + U$, so folgt $U = U'$ und $v - v_0 \in U$.

<u>Bew.:</u> i) schreibe $v = v_0 + u$, $u \in U$.

$X \subset v + U$: $\quad x \in X \Rightarrow x = v_0 + u'$ mit $u' \in U$,

also $x = v + (u' - u) \in v + U$.

$v + U \subset X$: Sei $u' \in U$. $v + u' = v_0 + (u + u') \in v_0 + U = X$.

ii) Setze $D := \{ x - x' \mid x, x' \in X \}$. Dann ist $D = U$, aber auch $D = U'$, also $U = U'$.

Wegen $v + U = v_0 + U$ gibt es ein $u \in U$ mit $v = v_0 + u$, also $v - v_0 \in U$. $\square$