6 Euklidische und unitäre Vektorräume

6.1 Skalarprodukt

VL #22b

Ziel: Längen- und Winkelmessung in einem Vektorraum

a) Bilinearformen

Def.: Sei V ein K-Vektorraum. Die Abbildung

$$s: V \times V \to K, \quad (v,w) \mapsto s(v,w),$$

heißt Bilinearform, falls die Abbildungen $v \mapsto s(v,w_0)$ und $w \mapsto s(v_0,w)$ für alle $v_0, w_0 \in V$ linear sind.

Sie heißt symmetrisch, falls $s(v,w) = s(w,v)$, und alternierend (oder schiefsymmetrisch), falls $s(v,w) = -s(v,w)$.

Schreibweise: $s(v,w) = \langle v, w \rangle$.

Beispiele:

(1) $\det: K^{2\times 2} \to K$ ist eine alternierende Bilinearform.

(2) eine symmetrische Bilinearform ist das kanonische Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^n$:

$$\langle x,y \rangle := x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{für Spalten } x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Def.: Eine Abbildung $f: V \to V$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V heißt semilinear, falls für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $f(v+\lambda w) = f(v) + \overline{\lambda} f(w)$.

komplexe Konjugation

Eine Abbildung $s: V \times V \to \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform, wenn $v \mapsto s(v, w_0)$ semilinear und $w \mapsto s(v_0, w)$ linear für alle $v_0, w_0 \in V$ sind. (semi = „halb“, sesqui = $1\frac{1}{2}$)

Sie heißt hermitesch, wenn zusätzlich $s(v,w) = \overline{s(w,v)}$.

Bem.:

(3) manche definieren auch, daß $s(v,w)$ in v linear und in w semilinear ist ($\to$ Fischer)

(4) Beispiel: kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x,y \rangle := \overline{x}^T y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \text{ für Spalten } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

(5) Beispiel 2: Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $V = \{f: [a,b] \to \mathbb{C} \text{ stetig}\} =: C([a,b])$. Dann ist

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

eine hermitesche Sesquilinearform.

(6) die Definition für $K = \mathbb{C}$ sind mit denen für $K = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ verträglich.

Def.: Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine symmetrische Bilinearform s (bzw. eine hermitesche Sesquilinearform) auf dem K-Vektorraum V heißt positiv definit, wenn $s(v,v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

Für $K = \mathbb{C}$ ist $s(v,v) \in \mathbb{R}$, da $s(v,v) - \overline{s(v,v)} = 0$.

Bem.:

(7) die Beispiele (2), (4) und (5) sind positiv definit:

$$\langle x,x\rangle = \overline{x}^T x = \sum_{i=1}^n \underbrace{|x_i|^2}_{\overline{x_i}x_i} > 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}\, f(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx > 0 \quad \text{für } f \neq 0.$$

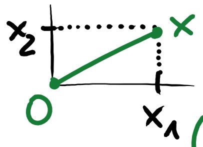
Def.: Eine positiv definite, symmetrische Bilinearform $\langle \cdot,\cdot \rangle$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt Skalarprodukt. Das Paar $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ nennen wir euklidischen Vektorraum. Im komplexen Fall ($K = \mathbb{C}$, symmetrisch $\mapsto$ hermitesch, bilinear $\mapsto$ sesquilinear) sprechen wir von einem unitären Vektorraum.

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt heißt auch Prähilbertraum. (↗ Quantenmechanik)

b) Norm

<u>Motivation:</u> Jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ordnen wir eine (euklidische) Länge oder Norm zu:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$



(Satz von Pythagoras)

Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ haben den (euklidischen) Abstand

distance

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}\,.$$

<u>Def.:</u> Sei V ein K-Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
Eine Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

(N1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, — Definitheit

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, — Homogenität

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ — Dreiecksungleichung (subadditiv)

für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$.

<u>Bem.:</u>

(1) ein Skalarprodukt auf V induziert eine Norm:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

<u>Bew.:</u> (N1, N2) sind klar. Für (N3) benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma: (Ungleichung von Cauchy-Schwarz)

Ist V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit induzierter Norm, so gilt für alle $x, y \in V$:

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \qquad (*)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Bew.: Für $y=0$ trivial. Sei $y \neq 0$. Dann ist zu zeigen: $\quad 0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$. Für $\lambda := \frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}$ gilt:

$$0 \leq \|x-\lambda y\| = \langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle - \bar{\lambda}\langle y,x\rangle - \lambda\langle x,y\rangle + \underbrace{|\lambda|^2\langle y,y\rangle}_{=\bar{\lambda}\lambda\|y\|^2}.$$

Damit ist $(*)$ bewiesen. Bei Gleichheit folgt $\|x-\lambda y\|^2 = 0$, also $x - \lambda y = 0 \Rightarrow$ lin. abhängig. Umgekehrt für $x = \alpha y$: $|\langle x,y\rangle| = |\langle \alpha y, y\rangle| = |\alpha| \cdot \|y\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$.

$\square$

Beweis von (N3):

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \overbrace{\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle}^{2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle} + \|y\|^2$$
$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \qquad \operatorname{Re} z \leq |z|$$
$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \qquad \text{Cauchy-Schwarz}$$
$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Monotonie von } \sqrt{\ }, \|.\| \geq 0) \qquad \square$$

<u>Bem.:</u>

(2) wichtiges Beispiel sind die p-Normen ($p \in \mathbb{N}$):

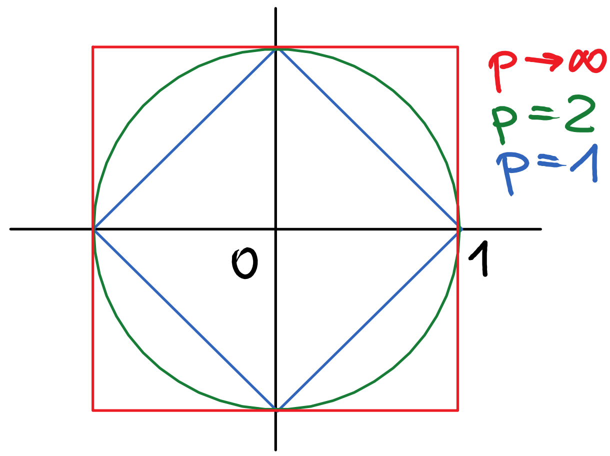
$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{C}^n.$$

Wie sieht eine „Kugel" $B_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p = 1\}$ aus?

- $p=1$: $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

  ($\rightsquigarrow$ Taxi-Metrik) ↵
- $p=2$: euklidische Norm
- $p \to \infty$: $\|x_\infty\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$

  Maximumsnorm



(2) Jede Norm induziert eine Abstandsfunktion $d(x,y) := \|x-y\|$, genauer eine Metrik:

<u>Def.:</u> Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auf einer Menge X heißt Metrik, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

(D1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (positiv definit)

(D2) $d(x,y) = d(y,x)$, (symmetrisch)

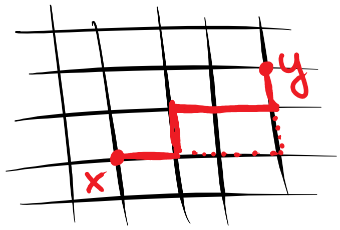
(D3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. (Dreiecksungleichung)

<u>Bem.:</u>

(3) Trivialbeispiel: diskrete Metrik $d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$

(4) „Taxi-Metrik" für Abstände im Straßennetz

$d_1(x,y) = \|x-y\|_1$



$d(x,y) = 3+2$

(5) wir haben:

$$\text{Skalarprodukt} \xrightarrow{} \text{Norm} \rightarrow \text{Metrik (Abstand)}$$

10.7

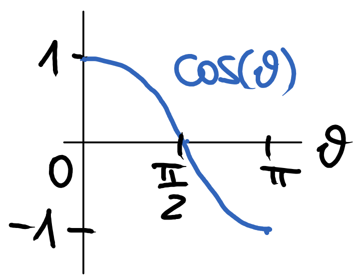
Die andere Richtung ist nicht immer möglich.

(vgl. Aufgabe 10.7, bei den p-Normen nur für $p=2$)

c) Winkelmessung

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für einen euklidischen/unitären Vektorraum V:

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \in [-1,1] \quad , \quad x,y \in V, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$



Def.: Zu je zwei Vektoren $x,y \in V$ mit $x,y \neq 0$ gibt es genau eine Zahl $\vartheta \in [0,\pi]$, so daß

$$\langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\| \cos(\vartheta).$$

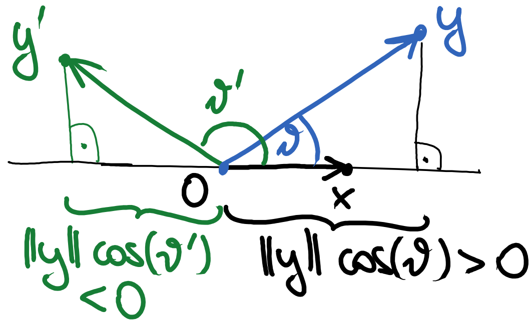
Wir nennen ϑ den Winkel zwischen x und y. Falls $\langle x,y\rangle = 0$, also $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so heißen x und y orthogonal oder senkrecht zueinander.

Notationen: $\vartheta = \sphericalangle(x,y)$, $x \perp y$ für x,y orthogonal.

Bem.:

(1) geometrische Interpretation für $\|x\| = 1$:

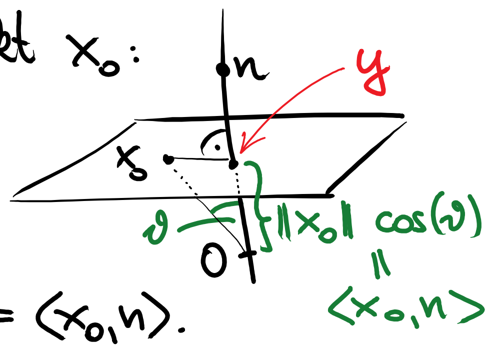
$\langle x, y \rangle$ ist die senkrechte Projektion von y auf die Gerade durch $0, x$, d.h. auf die „Richtung" x.



(2) Beispiel: Darstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor n und Aufpunkt x_0:

Bedingung: $x - \underbrace{\langle x_0, n \rangle n}_{y} \perp n$,

wobei $\|n\| = 1$.



$\Rightarrow E = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = a \}$, $a = \langle x_0, n \rangle$.

d) Darstellung durch Matrizen

Def.: Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Zu einer Bi- oder Sesquilinearform s auf V definieren wir die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(s) := (s(v_i, v_j))_{ij} \in K^{n \times n}$.

Satz: Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $\Phi_B : K^n \to V$ ein Koordinatensystem. Zu jeder Matrix $A \in K^{n\times n}$ gehört eine Bilinearform $s : V \times V \to K$ mit

$$s(v,w) := x^T A y, \quad x = \Phi_B^{-1}(v),\ y = \Phi_B^{-1}(w),$$

für alle $v, w \in V$. Es gilt $A = M_B(s)$.

Bew.: da Φ_B^{-1} linear ist, ist s bilinear, z.B.:

$$\begin{aligned} s(v, w+\lambda w') &= \Phi_B^{-1}(v)^T A\, \Phi_B^{-1}(w+\lambda w') \\ &= x^T A (y+\lambda y') = x^T A y + \lambda (x^T A y') \\ &= s(v,w) + \lambda\, s(v,w'). \end{aligned}$$

Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ die Basis zu Φ_B. Dann gilt

$$s(v_i, v_j) = e_i^T A e_j = a_{ij} \quad \text{für alle } 1 \le i,j \le n.$$

$\Rightarrow A = M_B(s)$. $\square$

VL #24

Satz: Eine Bilinearform s ist genau dann symmetrisch (bzw. positiv definit), wenn $M_B(s)$ symmetrisch (bzw. positiv definit) ist.

Bew.: Seien $A = (a_{ij}) = M_B(s)$, $x = \Phi_B^{-1}(v)$, usw.

- symmetrisch: $s(v,w) = s(w,v)$ für alle $v, w \in V$

$$\Leftrightarrow x^T A y = y^T A x \text{ für alle } x, y \in K^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{ij} x_i a_{ij} y_j = \sum_{ij} y_j a_{ji} x_i \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i,j$$

$$\Leftrightarrow A \text{ symmetrisch}$$

- positiv definit: $s(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$

$\Leftrightarrow \sum_{ij} x_i a_{ij} x_j > 0$ f.a. $x \in K^n$ $\Leftrightarrow$ A positiv definit

$\square$

<u>Korollar:</u> Jede positiv definite und symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert ein Skalarprodukt.

<u>Bem.:</u>

(1) Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad s(x,y) = x^T A y = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$

(2) die Matrix A induziert auch eine Norm und eine Metrik, sie heißt daher metrischer Tensor.

- euklidische Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{ij} x_i \delta_{ij} x_j\right)^{1/2} \Rightarrow A = \mathbb{1}_n$
- Minkowski-Raum:

$V = \mathbb{R}^4$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, $x = (x_0, \ldots, x_3) \in V$

$\Rightarrow s(x,y) = x^T A y = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_3 y_3$.

s ist bilinear und symmetrisch, aber nicht positiv definit $\Rightarrow$ kein Skalarprodukt $(e_0^T A e_0 = -1)$

(3) Komplexer Fall $(K = \mathbb{C})$:

- $s(v,w) := \overline{x}^T A y = \sum_{ij} \overline{x}_i a_{ij} y_j$,

umgekehrt: $a_{ij} = s(v_i, v_j)$ für $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

- s hermitesch $\Leftrightarrow$ A ist hermitesch, d.h. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

(4) Transformationsverhalten unter Basiswechsel:

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \left(\overline{T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(s)\, T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \qquad (K=\mathbb{C})$$

Bew.: $s(v,w) = \bar{x}^T A y$ mit $v = \Phi_{\mathcal{A}}(x)$, $w = \Phi_{\mathcal{A}}(y)$

in Basis $\mathcal{B}$: $v = \Phi_{\mathcal{B}}(x')$, $w = \Phi_{\mathcal{B}}(y')$, $T = T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$

$$\Rightarrow s(v,w) = (\overline{Tx'})^T A (Ty')$$

$$= (\bar{x}')^T \underline{\bar{T}^T A T}\, y' =: (\bar{x}')^T \underline{B}\, y'$$

für alle $x', y' \in K^n$. □

(5) zum Merken: für eine Bilinearform s gilt

$$\overset{\text{alt}}{A} = \bar{S}^T \overset{\text{neu}}{B} S$$

mit $\underset{T^{-1}}{S} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$, $A = M_{\mathcal{A}}(s)$, $B = M_{\mathcal{B}}(s)$.

Achtung: für $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $A = M_{\mathcal{A}}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}}(f)$ hatten wir $B = SAS^{-1}$. Die Transformationsformel für $n \times n$-Matrizen hängt von der Bedeutung der Matrizen ab.

(6) Polarisierung. Zu einer symmetrischen Bilinearform s definiert man die quadratische Form $q: V \to K$ mit $q(v) := s(v,v) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$. Dann gilt

$$s(v,w) = \frac{1}{2}\left[q(v+w) - q(v) - q(w)\right].$$

→ Aufgabe 10.7

Bew.: $q(v+w) = s(v+w, v+w) = s(v,v) + \underbrace{s(v,w) + s(w,v)}_{2s(v,w)} + s(w,w)$. □