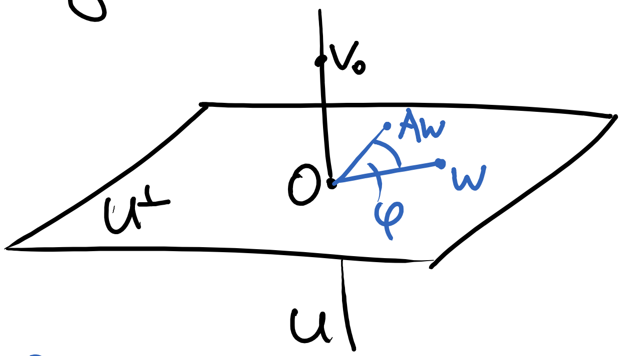
7 Eigenwerte

7.1 Eigenwerte und -vektoren

a) Beispiele

(1) sei $A \in SO(3)$ eine Drehung mit Achse $U = \mathrm{span}(v_0)$
Dann gilt für alle $v \in U$: $Av = v$, die Vektoren bleiben unverändert.

(2) für Drehwinkel $\varphi \neq 0, \pi$ gibt es kein $w \in U^\perp \setminus \{0\}$, so daß $Aw = \lambda w$ für irgendein $\lambda \in \mathbb{R}$.
(für A orthogonal muß $\lambda = \pm 1$ sein.)



(3) Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$:
Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in SO(2)$, also $a = \cos(\varphi)$, $b = \sin(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Wir suchen $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

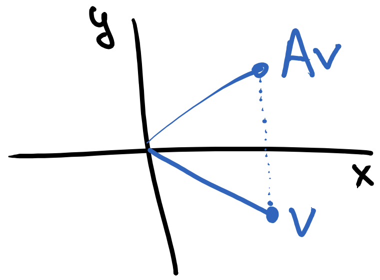
$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \text{LGS:} \quad \begin{pmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Es gibt genau dann eine Lösung $v \neq 0$, wenn $\det(\ldots) = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$.
$\Leftrightarrow a = \lambda,\ b = 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \lambda = \pm 1,\ \sin(\varphi) = 0$.

Dann ist $A = \pm \mathbb{1}_2$. Bei Drehungen um den Winkel $\varphi = 0$ bzw. π ist $\lambda = 1$ bzw. -1 und $Av = \lambda v$ gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^2$.

(4) Spiegelung in $\mathbb{R}^2$ an Gerade $y=0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \quad Av = +v \quad \text{für } v \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$Av = -v \quad \text{für } v \in \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5) Projektion $P: V \to V$ auf $U \subset V$

- für $u \in U$ ist $Pu = 1 \cdot u$ $\quad (P|_U = \mathrm{id}_U)$
- für $w \in \ker P$ ist $Pw = 0 \cdot w$
- es gilt $V = U \oplus \ker P$.

6) Definitionen

<u>Def.:</u> Sei f ein Endomorphismus des K-Vektorraums V. Gibt es $\lambda \in K$ und $v \in V$ mit $v \neq 0$, so daß $f(v) = \lambda v$, dann heißen λ Eigenwert von f und v Eigenvektor von f (zum Eigenwert λ).

Bem.:

(1) $\lambda = 0$ ist erlaubt, jedoch $v = 0$ nicht.
Ist v Eigenvektor, dann auch αv für alle $\alpha \in V$.

(2) $v \in V \setminus \{0\}$ ist genau dann Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $v \in \ker(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)$.
Bew.: $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f(v) - \lambda\, \mathrm{id}_V(v) = 0$. $\square$

(3) λ ist genau dann Eigenwert von f, wenn $f - \lambda\, \mathrm{id}_V$ nicht injektiv ist, d.h. $\ker \neq \{0\}$.

Def.: Sind $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$, so heißt
$$\mathrm{Eig}(f;\lambda) := \ker(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$
Eigenraum von f bezüglich λ. Die Dimension $\dim \mathrm{Eig}(f;\lambda)$ heißt geometrische Vielfachheit von λ.
Ein Untervektorraum $U \subset V$ heißt f-invariant, falls $f(U) \subset U$.

Bem.:

(4) $\mathrm{Eig}(f;\lambda)$ ist Untervektorraum und f-invariant.
$\mathrm{Eig}(f;\lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der Eigenvektoren zu λ.

(5) Sind $\lambda \neq \mu$ Eigenwerte, so ist $\mathrm{Eig}(f;\lambda) \cap \mathrm{Eig}(f;\mu) = \{0\}$
Bew.: $f(v) = \lambda v$, $f(v) = \mu v \Rightarrow (\lambda - \mu) v = 0 \Rightarrow v = 0$ $\square$

(6) Ist f nicht injektiv, so ist 0 Eigenwert mit $\mathrm{Eig}(f;0) = \ker f$. Für $\dim V = n < \infty$ hat 0 die geometrische Vielfachheit $n - \mathrm{rang}\, f$
(Dimensionsformel!)

(7) Eine Drehung $A \in SO(3)$ mit Achse $U = \mathrm{span}(v_0)$ hat als einzigen Eigenwert 1 und $\mathrm{Eig}(A;1) = U$. $U^\perp$ ist A-invariant. Es gilt: $V = \mathrm{Eig}(A;1) \oplus U^\perp$.

(8) Eine Drehung $A \in SO(2)$ mit $A \neq \mathbb{1}, -\mathbb{1}$ hat keine Eigenwerte und $\mathbb{R}^2$ ist der kleinste invariante Unterraum.

(9) Eine Spiegelung hat die Eigenwerte $+1$ und -1.

(10) Die Projektion P auf $U \subset V$ hat die Eigenwerte 0 und 1 mit
$$\mathrm{Eig}(P;0) = \ker P \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}(P;1) = U.$$
Es gilt: $V = \mathrm{Eig}(P;0) \oplus \mathrm{Eig}(P;1)$

Ist P eine orthogonale Projektion ($P^t = P$), so ist die Zerlegung orthogonal.
§7c(5)

(11) zur Ableitung $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$

unendlich oft differenzierbar

ist jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lambda f(x) \qquad \text{(Differentialgleichung)}$$

$\Leftrightarrow f(x) = ce^{\lambda x}$ für $c \in \mathbb{R}$, d.h.

$\mathrm{Eig}(\frac{d}{dx}; \lambda) = \mathrm{span}(e^{\lambda x})$. („Fundamentalsystem")

c) Eigenbasis

__Lemma:__ Sind $(v_1, \ldots, v_m)$ Eigenvektoren von $f \in \mathrm{End}(V)$ zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, dann ist $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig.

__Bew.:__ Induktion in $m \geq 1$. Für $m = 1$ wegen $v_1 \neq 0$ klar.
Sei $m \geq 2$. Annahme: $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ sind linear unabhängig.
Aus $\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0$ folgt $f(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i) = 0 = \lambda_m \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$
bzw. $0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i [f(v_i) - \lambda_m v_i] = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) v_i$.
Wegen $\lambda_i \neq \lambda_m$ für $i \neq m$ und nach Induktionsannahme folgt $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$. Es bleibt $\alpha_m v_m = 0$, wegen $v_m \neq 0$ ist auch $\alpha_m = 0$. $\square$

Korollar: Sei $\dim V = n < \infty$ und habe $f \in \mathrm{End}(V)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte. Dann gibt es Eigenvektoren von f, die eine Basis von V bilden. Solch eine Basis heißt Eigenbasis von V bezüglich f.

Bem.:

(1) Für $\dim V < \infty$ ist eine Basis $\mathcal{B}$ genau dann Eigenbasis zu $f \in \mathrm{End}(V)$, wenn $M_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist, d.h.

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hier müssen die λ_i nicht alle verschieden sein.

Bew.: Sei $M_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$. Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Eigenbasis, dann ist $f(v_j) = \lambda_j v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ für alle j.
$\Rightarrow a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Die Umkehrung ist dann klar. $\square$

VL#28

Def.: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, falls es $S \in GL(n; K)$ mit $B = SAS^{-1}$ gibt.
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

($\to$ Basiswechsel, §4.46)

<u>Bem.:</u>

(2) Sei $A \in K^{n\times n}$. Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Eigenbasis zu $A : x \mapsto Ax$, so ist $B = SAS^{-1}$ mit $S^{-1} = (v_1, \dots, v_n)$ diagonal.

Spalten

<u>Def.:</u> Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Eigenbasis von V bezüglich f gibt.

<u>Bem.:</u>

(3) Für $\dim V < \infty$ mit Basis $\mathcal{A}$: — beliebige Basis

$$f \text{ diagonalisierbar} \Leftrightarrow M_{\mathcal{A}}(f) \text{ diagonalisierbar}$$

d) Charakteristisches Polynom

Wieviele Eigenwerte hat ein Endomorphismus?
Wieviele davon sind gleich?

<u>Proposition:</u> Sei $\dim V < \infty$. $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von $f \in \mathrm{End}(V)$, wenn $\det(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$.

<u>Bew.:</u> λ Eigenwert $\Leftrightarrow \ker(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow \operatorname{rang}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) < \dim V \Leftrightarrow \det(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0$. $\square$

<u>Bem.:</u>

(1) Seien $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.
Dann ist $\det(f - t\, \mathrm{id}_V) = \det(A - t\, \mathbb{1}_n)$,
unabhängig von der Wahl der Basis. ($\nearrow$ §5.4)

(2) $\det(A - t\, \mathbb{1}_n)$ mit $A \in K^{n \times n}$ ist ein Polynom in t vom Grad $n = \dim V$. (§5.3c, Leibnizformel)

<u>Def.:</u> Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim V = n < \infty$. Dann heißt $P_f(t) := \det(f - t\, \mathrm{id}_V) \in K[t]_n$ das **charakteristische Polynom** von f.

Bem.:

(3) Die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von P_f sind die Eigenwerte von f.

(4) Nach der Leibnizformel ist für $A = (a_{ij})$:

$$P_f = \det(A - t\mathbb{1}_n) = (a_{11} - t) \ldots (a_{nn} - t) + Q$$

mit $Q = K[t]_{n-2}$. Ausmultiplizieren liefert:

$$P_f = \gamma_n t^n + \gamma_{n-1} t^{n-1} + \ldots + \gamma_0 \qquad \gamma_0 = P_f(0)$$

mit $\gamma_n = (-1)^n$, $\gamma_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$, $\gamma_0 = \det A$.

Dabei heißt $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ die Spur von $A \in K^{n \times n}$.

(5) Für $n = 2$ gilt: $P_f = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A$.

$$P_f(\lambda) = 0 \iff \lambda_{1/2} = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2 - \det A}$$

(i) für $K = \mathbb{C}$ gibt es stets zwei Eigenwerte, es ist $P_f = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \in \mathbb{C}[t]_2$ ($\lambda_1 = \lambda_2$ möglich)

(ii) für $K = \mathbb{R}$ gibt es $0, 1, 2$ Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$, jenachdem ob $D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A \gtreqless 0$.

- für $D < 0$ ist $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A \pm \frac{i}{2}\sqrt{|D|} \in \mathbb{C}$, d.h. ein komplex konjugiertes Paar.
  $\Rightarrow$ kein reeller Eigenwert
- für $D = 0$ ist $\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$, doppelte Nullstelle:
  $$P_f = (t - \lambda)^2$$
  $\Rightarrow$ ein Eigenwert

(6) Beispiel 1: $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 2, \ \operatorname{tr} A = 3$

$P_A = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$

$\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

Eigenraum zum Eigenwert 1:

$\operatorname{Eig}(A;1) = \text{Lös}(A - 1\cdot\mathbb{1} \mid 0) = \text{Lös}\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$

$= \text{Lös}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_2 = \alpha, \ x_1 = 3\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Analog: $\operatorname{Eig}(A;2) = \text{Lös}\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 2 Eigenwerte, 2 Eigenvektoren* $\Rightarrow$ Eigenbasis

In der Eigenbasis $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird A diagonal.

Transformationsmatrix: *linear unabhängige

$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(7) Beispiel 2: $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr} B = 2, \ \det B = 1$

$P_B = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^{2} = \begin{vmatrix} 0-t & -1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix}$

doppelte Nullstelle

$\Rightarrow$ Eigenwert $\lambda = 1$. $\operatorname{Eig}(B;1) = \text{Lös}\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\dim \operatorname{Eig}(B;1) = 1 < 2$ $= \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ es gibt keine Eigenbasis zu B

e) Linearfaktorzerlegung von Polynomen (Exkurs)

Erinnerung (§1.4c):

- ein Polynom $P \in K[t]$ vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ in der Variablen t ist ein Ausdruck
$$P = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \,; \qquad a_i \in K,\ a_n \neq 0.$$
Konvention: $P = 0 \Leftrightarrow \deg P = \infty$

- $\lambda \in K$ heißt Nullstelle von P, falls $P(\lambda) = 0$

- Zu einer Nullstelle λ von P gibt es genau ein $Q \in K[t]$ mit $P = (t-\lambda)\cdot Q$ und $\deg Q = \deg P - 1$.
„Abspalten einer Nullstelle"

- Ist $\deg P = n$, so hat P höchstens n Nullstellen

- Nullstellen können mehrfach auftreten:
Gilt $P = (t-\lambda)\cdot Q$, so kann auch $Q(\lambda) = 0$ sein.

<u>Def.:</u> Sind $P \in K[t]$ ein Polynom, $P \neq 0$, und $\lambda \in K$, so heißt
$$\mu(P;\lambda) := \max\{r \in \mathbb{N} \mid P = (t-\lambda)^r \cdot Q \text{ mit } Q \in K[t]\}$$
die Vielfachheit der Nullstelle λ von P.

Bem.:

(1) $\mu(P;\lambda)=0 \Leftrightarrow P(\lambda)\neq 0$ nach dem Lemma.
Aus $P=(t-\lambda)^r\cdot Q$ mit $r=\mu(P;\lambda)$ folgt $Q(\lambda)\neq 0$.
$\Rightarrow$ Die Vielfachheit gibt an, wie oft der Linearfaktor $(t-\lambda)$ in P enthalten ist.

(2) Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in K$ die verschiedenen Nullstellen von $P\in K[t]$ und $r_i:=\mu(P;\lambda_i)$, so ist

$$P=(t-\lambda_1)^{r_1}\cdots(t-\lambda_k)^{r_k}\cdot Q,$$

wobei $Q\in K[t]$ vom Grad $n-(r_1+\dots+r_k)$ ist und keine Nullstellen besitzt.
- worst case: $P=Q$ $\Rightarrow$ P hat keine Nullstellen
- bester Fall: $\deg Q=0$ (Q ist konstant), d.h. „P zerfällt in Linearfaktoren".

Wann besitzt ein Polynom überhaupt eine Nullstelle?

Satz: (Fundamentalsatz der Algebra, C.F. Gauß, 1799)
Jedes Polynom $P\in\mathbb{C}[t]$ mit $\deg P>0$ hat mindestens eine Nullstelle.
$P\neq$ const.

Beweis: $\rightarrow$ Analysis, Funktionentheorie, ...

Korollar: Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[t]$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h. es gibt $a \in \mathbb{C}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $\deg P = n$, so daß

$$P = a(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n).$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind „algebraisch abgeschlossen."

Lemma: Sei $P \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, so ist auch ihr komplex Konjugiertes $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle.
Es gilt: $\mu(P;\lambda) = \mu(P;\overline{\lambda})$.

Die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms liegen symmetrisch zur reellen Achse.

Bew.: $P = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, $a_k \in \mathbb{R}$. Es gilt $\overline{a_k} = a_k$.

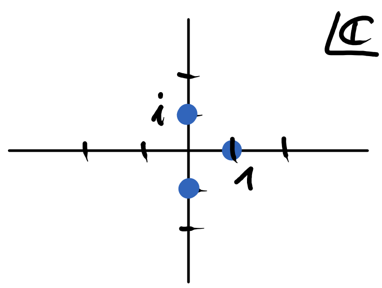
$$P(\overline{\lambda}) = \sum_k a_k (\overline{\lambda})^k = \sum_k \overline{a_k \lambda^k} = \overline{P(\lambda)} = 0.$$

Zeige $\mu(P;\lambda) \leq \mu(P;\overline{\lambda})$ und $\lambda \leftrightarrow \overline{\lambda}$ (Fischer, §1.3.10) $\square$

Bsp.:

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}t^4 - t^3 + t^2 - t + \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}(t-1)^2(t^2+1) \quad \leftarrow \text{reelle Faktorisierung} \\ &= \tfrac{1}{2}(t-1)^2\,\underbrace{(t-i)(t+i)}_{} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \deg P = 4$, aber nur 3 Nullstellen in $\mathbb{C}$: 1 (doppelt), $+i$, $-i$



<u>Bem.:</u> komplex konjugierter Paare nicht-reeller Nullstellen können wir zusammenfassen:

$$Q = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda}) = t^2 - (\lambda+\bar{\lambda})t + \lambda\bar{\lambda}$$
$$= t^2 - 2(\mathrm{Re}\,\lambda)t + |\lambda|^2$$

$\Rightarrow Q \in \mathbb{R}[t]$ und $\deg Q = 2$. Daraus folgt:

<u>Satz:</u> Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg P > 0$ gestattet eine Zerlegung

$$P = a\,(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_r)\cdot Q_1 \cdots Q_m,$$

wobei $a, \lambda_1, \dots \lambda_r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, und $Q_1, \dots, Q_m \in \mathbb{R}[t]$ normierte Polynome vom Grad 2 ohne reelle Nullstelle sind. Insbesondere ist $\deg P = r + 2m$.

($\rightarrow$ Jordan-Normalform)

<u>Korollar:</u> Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[t]$ von ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.