Synopse

Die wesentlichen Inhalte der Vorlesung umfassen:
- Begriffe und definierende Eigenschaften
- Rechenregeln
- Verfahren/Algorithmen
- Sätze über Existenz, Eindeutigkeit, Äquivalenzen

(Diese Übersicht hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit!)

Begriffe und Eigenschaften

- Körper, konkret $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (§1.3)
  ↳ Addition und Multiplikation

- Vektorraum (Addition und Skalarprodukt)
  - Beispiele: K^n, Polynome, $\mathrm{Hom}(V,W)$ (S. L18)
  - Basis und Dimension, Koordinaten eines Vektors
  - Untervektorräume, direkte Summe
  - Basiswechsel
  - euklidischer ($K=\mathbb{R}$) bzw. unitärer ($K=\mathbb{C}$) Vektorraum,
    → Skalarprodukt, Norm, Winkel
  - orthogonale Vektoren, Orthonormalbasis

- lineares Gleichungssystem (LGS)
  - Formulierung als Matrixproblem, Rang,
  - Lösungsraum als affiner Unterraum (§4.2c)

- lineare Abbildung
  - Bild und Kern, Zusammenhang mit LGS (§4.1c)
  - darstellende Matrix und Basiswechsel (§4.3, 4.4)
  - Endomorphismen („lineare Operatoren")
    - Invarianten: Rang, Determinante, Spur
  - orthogonale Projektion ($P^2 = P$, $\ker P \perp \operatorname{im} P$)
  - isometrische Abbildungen (orthogonal / unitär)
    - Bsp.: Drehung, Spiegelung, Fouriertransformation
    - längentreu, winkeltreu, volumentreu – orientierungstreu?
  - selbstadjungierte Abbildung $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$
    Bsp.: orthogonale Projektion
  - Eigenwert und Eigenvektor, charakteristisches Polynom
  - Eigenraumzerlegung (§7.2a)

- Matrizen:
  - symmetrisch ($A = A^T$), hermitesch ($A = \overline{A}^T$)
  - orthogonal ($A^T A = \mathbb{1}$), unitär ($\overline{A}^T A = \mathbb{1}$)
  - Determinante, Rang, Spur
  - Diagonalisierung

Rechenregeln

- Arithmetik in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$
  Assoziativ- und Distributivgesetze, Kommutativität,
  Inverses, Betrag, Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$
- Rechnen mit Matrizen und Abbildungen („Ring" End(V))
  Multiplikation, Inverses, Gleichungen umstellen

- Koeffizientenvergleich (z.B. $\sum_i \underline{\lambda_i} v_i = \sum_i \underline{\mu_i} v_i$)

- Rechnen mit linearen Abbildungen (S. L2)

- Rechnen mit Determinanten
  - multilinear und alternierend, $\det A^T = \det A$
  - Dreiecksmatrizen, Entwicklungssatz nach Laplace
  - Multiplikationssatz

  $\Rightarrow \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$, $\det(AB) = \det(BA)$

- Levi-Civita-Symbol ($n=2$ und 3) ε_{ijk}
- Kreuz- und Spatprodukt $a \cdot (b \times c) = \det(a, b, c)$

Verfahren

- Beweis durch Widerspruch (z.B. Seite G9)
- Beweis durch vollständige Induktion (§1.1c, S. G33)

- Eliminationsverfahren nach Gauß (§3.3)
  - Lösen eines LGS
  - Inverses, Determinante, Rang einer Matrix

- Basiswechsel: Aufstellen der Transformationsmatrix (S. L27)

- Gram-Schmidt-Verfahren (§6.2c)
  → Orthonormalbasis

- Berechnung von Eigenwerten und Eigenräumen von $n\times n$-Matrizen
  $P_A(\lambda)=0$, $\mathrm{Eig}(A;\lambda)=\mathrm{Lös}(A-\lambda\mathbb{1}\,|\,0)$

Sätze

- Eindeutigkeit der Koordinaten eines Vektors (S. V11, V13)
  - $v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$ für Basis $(v_i)_{i\in I}$
  - Orthonormalbasis $\Rightarrow \lambda_i = \langle v_i, v\rangle$ (§6.2a, S. S13)
- eindeutige Zerlegung bzgl. einer direkten Summe (S. V23)
  $v = u + w$, $V = U \oplus W$, $u \in U, w \in W$.

- Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren vollständig bestimmt. (S. L19)
  $\rightarrow$ Spalten der darstellenden Matrix (§4.3c)
- Dimensionsformel (§4.2a) $\dim V = \operatorname{rang} f + \dim \ker f$

- Lösung eines LGS (S. L14): $\text{Lös}(A|b) = x_0 + \text{Lös}(A|0)$
  allgemein = speziell + homogen

- Kriterien für Invertierbarkeit einer $n\times n$-Matrix:
  $\operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \ker A = \{0\}$

- Ungleichungen für $x, y \in V$:
  - Dreiecksungleichung: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
  - Cauchy-Schwarz: $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Aussagen zur Diagonalisierung:

Für $f \in End(V)$ bzw. $A \in K^{n \times n}$ normal gilt:

$(f^+ \circ f = f \circ f^+$ bzw. $\bar{A}^T A = A \bar{A}^T)$

- Eigenräume sind paarweise orthogonal (S. E24)
- diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ es gibt orthonormale Eigenbasis

- f selbstadjungiert bzw. A symmetrisch / hermitesch:
  $(f^+ = f$ bzw. $\bar{A}^T = A)$
  reelle Eigenwerte, für $K = \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ diagonalisierbar

- f bzw. A unitär, $K = \mathbb{C}$: $(f^+ = f^{-1}$ bzw. $\bar{A}^T = A^{-1})$
  Eigenwerte $|\lambda| = 1$, diagonalisierbar

- f bzw. A orthogonal, $K = \mathbb{R}$: $(f^+ = f^{-1}$ bzw. $A^T = A^{-1})$
  Eigenwerte $\lambda = \pm 1$, unvollständig diagonalisierbar
  (S. E31)