Mehrgittermethoden und adaptive Diskretisierungsverfahren zur Simulation von Strömungs– und Transportprozessen in Kluftaquiferen

Lina Neunhäuserer(1), Susanna Gebauer(2), Reinhard Hinkelmann(1), Ralf Kornhuber(2), Rainer Helmig(1)

(1) TU Braunschweig, Institut für ComputerAnwendungen im Bauingenieurwesen

(2) FU Berlin, Fachbereich Mathematik und Informatik, Institut für Mathematik 1

e-mail: lneun@bi.bau.tu-bs.de, sugebaur@math.fu-berlin.de

Kurzfassung

Im Zusammenhang mit der Deponierung von Schadstoffen und der Trinkwassergewinnung kommt der Simulation von Strömungs – und Transportprozessen in geklüfteten Bodenzonen eine große Bedeutung zu. Die oft sehr unterschiedlichen hydraulischen Eigenschaften von Kluftsystem und umgebender Gesteinsmatrix prägen das Strömungs – und Transportverhalten stark. Die daraus resultierende Heterogenität der physikalischen Prozesse ebenso wie die Komplexität der zugrundeliegenden Geometrie stellt hohe Anforderungen an die numerische Modellierung.

In der vorliegenden Arbeit werden Modellansätze verwendet, die Klüfte und Matrix diskret beschreiben. Um die Nachteile der bisher verwendeten Kopplung von Elementen unterschiedlicher Dimension (keine Flußerhaltung am Kluft – Matrix – Übergang) zu vermeiden, werden Kluft und Matrix mit Elementen gleicher Dimension vernetzt, wobei in den Klüften degenerierte Elemente zugelassen werden. Alle weiteren Bausteine des Lösungsprozesses müssen daher robust gegenüber verschwindender Kluftweite (reduziertes Problem) sein. Die Diskretisierung der Strömungsgleichung wird mit einem Standard – Galerkin – Finite – Elemente – Verfahren durchgeführt, für die Transportgleichung wird ein modifiziertes Boxverfahren eingesetzt. Zur Lösung der Strömungsgleichung wird ein neuartiges Mehrgitterverfahren verwendet, das eine hierarchische Zerlegung des Lösungsraums in einen Kluft – und einen Matrixraum beinhaltet. Dies ermöglicht zu einem späteren Zeitpunkt die Anwendung unterschiedlicher, an den jeweils dominanten physikalischen Prozeß angepaßter Diskretisierungsverfahren in Kluft und Matrix.

1 Einleitung

Die Überwachung von Kluftaquiferen, die als Trinkwasserreservoir genutzt werden, die Planung und Dimensionierung von Sanierungs– oder Sicherungsmaßnahmen für Altlasten oder auch die sicherheitstechnische Beurteilung von Deponiestandorten im gegebenenfalls klüftigen Festgestein erfordern die Kenntnis der Strömungs– und Transportprozesse im fraglichen Gebiet. Dabei beeinflußt die starke Heterogenität des geklüfteten Untergrunds das Prozeßverhalten in hohem Maße. Unter gesättigten Bedingungen zeichnen sich Klüfte oder Kluftzonen im allgemeinen durch eine verhältnismäßig große Durchlässigkeit und geringe Speicherkapazität aus. So können sie bevorzugte Fließwege darstellen, die ein schnelles Vordringen von gelösten Schadstoffen ermöglichen. Im Gegensatz dazu weist die umgebende Gesteinsmatrix eine oft sehr niedrige Permeabilität und eine hohe Speicherkapazität auf. Eindringender

Schadstoff kann so eine Langzeitkontamination verursachen, indem er sich sehr langsam weiter durch die Matrix bewegt oder aber wieder in die Kluft abgegeben wird. Die Transportprozesse spielen sich demnach auf sehr unterschiedlichen räumlichen und zeitlichen Skalen ab.
Vor diesem Hintergrund hat sich die numerische Modellierung von Strömungs– und Transportprozessen in den letzten Jahren zu einem wichtigen Instrument bei der Lösung der anfangs genannten Aufgabenstellungen entwickelt. Es existieren verschiedene Modellansätze, die sich im Wesentlichen in die beiden Gruppen der äquivalenten Ansätze und der diskreten Ansätze einteilen lassen. Äquivalente Modellansätze basieren auf der Annahme, daß das inhomogene, geklüftete Untersuchungsgebiet durch eine physikalisch begründete Änderung des Beobachtungsmaßstabs stückweise homogenisierbar ist. Im Rahmen der Theorie poröser Medien erfolgt durch Mittelwertbildung eine Übertragung mikroskopischer Größen auf makroskopisches Niveau (Narasimhan & Pruess[17], Lang[15], Birkhölzer[5]). In der vorliegenden Arbeit soll jedoch davon ausgegangen werden, daß die Vorgänge im Untersuchungsgebiet von der Klüftung beherrscht werden und eine explizite Behandlung der Diskontinuitäten erforderlich ist. Es wird daher ein diskreter Modellansatz verwendet. Diskrete Modellansätze umfassen Einzelkluftmodelle, Kluftnetzwerkmodelle und kombinierte Modelle (Tsang et al.[22], Wollrath[23], Kröhn[14]). Einzelkluftmodelle und Kluftnetzwerkmodelle betrachten die Gesteinsmatrix als undurchlässig. Experimentelle und numerische Ergebnisse zeigen jedoch, daß der Transport durch die Gesteinsmatrix und die Interaktion zwischen Kluft und Matrix im allgemeinen nicht zu vernachlässigen ist (vgl. z.B. Himmelsbach[12], Małoszewski & Zuber[16], Neunhäuserer[18]).
Die im folgenden vorgestellte Arbeit ist den kombinierten Modellen zuzuordnen, die sowohl die Klüfte als auch die umgebenden Gesteinsmatrix diskret beschreiben. Die Gesteinsmatrix kann dabei ein äquivalentes Kontinuum eines Kluftsystems kleineren Maßstabs sein. Kluft und Matrix werden dabei üblicherweise durch Elemente unterschiedlicher Dimension modelliert (Helmig[10], Barlag[3]). Die Kopplung von Kluft und Matrix erfolgt durch Addition der geeignet gewichteten lokalen Elementsteifigkeitsmatrizen. Dadurch ist allerdings die lokale Flußerhaltung am Kluft – Matrix – Übergang nicht gewährleistet und der zugrundeliegende physikalische Prozeß gegebenenfalls nicht richtig erfaßt. Weiterhin kann die in der starken Heterogenität des geklüftet oder geklüftet – porösen Gesteins begründete Variabilität der Strömungs– und Transportprozesse zu Schwierigkeiten bei der numerischen Simulation insbesondere des Transportverhaltens führen. Die Transportberechnung ist zum einen in hohem Maße abhängig von dem zugrundeliegenden Strömungsfeld. Die Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung muß daher mit großer Sorgfalt erfolgen. Kritische Bereiche sind vor allem Inhomogenitäten wie Wechsel der Materialeigenschaften (Klüfte) oder Quellen und Senken, wo Betrag und Richtung der Geschwindigkeit auf kleiner Fläche stark variieren können. Zum anderen wechselt im Übergangsbereich von Kluft und Matrix der Charakter der Transportgleichung zwischen Diffusion und Advektion bzw. im mathematischen Sinne zwischen parabolisch und hyperbolisch. Das zur numerischen Lösung eingesetzte Verfahren muß diesen Wechsel erfassen und verarbeiten können, um Probleme wie numerische Dispersion und numerische Oszillation zu minimieren bzw. zu vermeiden. Hinzu kommen scharfe Konzentrationsfronten im hochadvektiven Kluftbereich und, wenn auch in etwas abgemilderter Form, zwischen Kluft und Matrix, die das verwendete Diskretisierungsverfahren stabil und möglichst genau erhalten soll.
Für ein effizientes, robustes und zuverlässiges Lösungsverfahren zur Berechnung von Strömungs– und Transportprozessen in geklüftet – porösen Medien werden daher verschieden Verfahren und Techniken miteinander kombiniert und weiterentwickelt. Um die lokale Flußerhaltung am Kluft – Matrix – Übergang zu gewährleisten, sollen Kluft und Matrix mit Elementen der gleichen Dimension vernetzt werden, wobei in den Klüften degenerierte Ele-

mente zugelassen werden. Für die Strömung wird ein Standard – Galerkin Finite – Elemente – Verfahren eingesetzt. Die Transportgleichung wird mit einem lokal konservativen Boxverfahren diskretisiert, wobei durch ein Upwinding entlang der Stromlinien eine Verringerung der Querdiffusion erreicht wird. Die Lösung des Modellproblems wird zunächst für die Strömung mit einem effizienten Mehrgitterverfahren durchgeführt, das eine hierarchische Zerlegung des Lösungsraums in einen Kluft– und einen Matrixraum beinhaltet. Die Entkopplung von Kluft– und Matrixproblem bietet einige Vorteile für die Diskretisierung. So kann z.B. das bei einer gekoppelten Lösung auftretende Problem, daß die Basisfunktionen am Kluftrand zur Matrix hin unverhältnismäßig steil werden, abgeschwächt und auf das Matrix – Problem beschränkt werden. Im Matrixraum kann dieses gezielt angegangen und mit problemangepaßten Glättungsschritten beseitigt werden. Weiterhin soll das vorgestellte Mehrgitterverfahren in Verbindung mit den Elementen gleicher Dimension für Kluft und Matrix auf die Diskretisierung der Transportgleichung übertragen werden, um die Vorteile der Entkopplung von Kluft– und Matrixraum auch hier nutzen zu können. Denkbar ist z.B. die Verwendung unterschiedlicher Diskretisierungsverfahren, die den jeweilig dominanten physikalischen Prozessen angemessen sind. Die räumliche Diskretisierung der Modellgebiete wird mit dem Netzgenerator ART (Fuchs[9]) durchgeführt. In einem nachgeschalteten Schritt werden die Klüfte mit 2D – Elementen vernetzt. Die eingesetzten numerischen Verfahren sind auf der Basis der Software – Toolbox UG (Bastian et al.[4]) implementiert.

2 Mathematische Modellierung

Strömungsgleichung Betrachtet wird eine Strömung unter gesättigten Bedingungen in einem gespannten Aquifer. Es wird angenommen, daß das Fluid inkompressibel und das geklüftet – poröse Medium nicht deformierbar ist. Dann gilt die Kontinuitätsgleichung

$$S_o \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{v}_f = f \tag{1}$$

in Verbindung mit der Darcy–Gleichung

$$\underline{v}_f = -\underline{\underline{K}} \cdot \nabla h, \tag{2}$$

hier in der Druckformulierung mit $p = \rho\, g\, (h - z)$:

$$S_0\, p_t = \nabla \cdot (K \nabla p) + \rho\, g\, \nabla \cdot (K \nabla z) + f g \tag{3}$$

S_0	spezifischer Speicherkoeffizient	g	Gravitation
h	Piezometerhöhe	$\underline{v}_f$	Filtergeschwindigkeit
p	Druck	z	geodätische Höhe
K	hydr. Leitfähigkeit	f	Quelldichte
ρ	Fluiddichte		

Transportgleichung Für das aus Gleichung (3) bekannte Strömungsfeld kann der Transport eines idealen Tracers mit der folgenden Gleichung beschrieben werden:

$$c_t = -\nabla \cdot (\underline{v}_a\, c) + \nabla \cdot (\underline{\underline{D}} \nabla c) \tag{4}$$

c	Konzentration des gelösten Stoffes
$\underline{v}_a$	Abstandsgeschwindigkeit mit
$\underline{v}_a$	$= \underline{v}_f / n_e$
n_e	effektive Porosität
$\underline{\underline{D}}$	hydrodynamischer Dispersionstensor

Der erste Term auf der rechten Seite enthält den advektiven, der zweite Term den diffusiv – dispersiven Anteil der Gleichung. Unter Advektion wird dabei der Transport des gelösten Stoffes mit der Abstandsgeschwindigkeit verstanden. Diffusion beschreibt den Konzentrationsausgleich infolge Brownscher Molekularbewegung unabhängig von der Fluidströmung, und als Dispersion wird der strömungsabhängige Konzentrationsausgleich durch mikro– und makroskalige Inhomogenitäten des betrachteten Bodens bezeichnet. Gleichung (4) hat im mathematischen Sinn einen gemischt parabolisch – hyperbolischen Charakter. Dominiert der diffusiv – dispersive Anteil, überwiegt die stabile parabolische, bei starker Advektion hingegen die hyperbolische Form der Gleichung.

3 Softwarebasis

Netzgenerierung Für die geometrische Diskretisierung der Kluftnetzwerke und der umgebenden Matrix wird der sehr flexible Netzgenerator *ART (Almost Regular Triangulation)* eingesetzt. Dieser Netzgenerator wurde am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart im Rahmen des SFB 404 "Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik" entwickelt und in Zusammenarbeit an die speziellen Anforderungen geklüfteter Systeme angepasst. Die Generierung der Netze beruht auf einer optimierten Delaunay - Triangulierung, wobei das Ziel verfolgt wird, qualitativ hochwertige Elementgeometrien und möglichst regelmäßige Netzstrukturen zu erzeugen. Dies wirkt sich positiv auf die Genauigkeit der nachfolgend auf den Netzen erstellten numerischen Lösungen aus (Erhaltung des lokal – konservativen Verhaltens des zur Anwendung kommenden Diskretisierungsverfahrens).
Der Netzgenerator *ART* ermöglicht die Vernetzung sowohl zweidimensionaler als auch dreidimensionaler Gebiete. Der zugrundeliegende Algorithmus ist für beide Dimensionen nahezu identisch:

- Mit Hilfe einer Dichtefunktion wird eine Basis – Konfiguration von Knoten erstellt.
- Die Position der Knoten zueinander wird durch Minimierung eines Penalty - Funktionals optimiert.
- Durch die anschließende Triangulierung wird ein Netz aus Delaunay - Elementen (Dreiecke bzw. Tetraeder) erzeugt.

Das Startgitter für die Basis - Konfiguration der Knoten wird bestimmt, indem ein reguläres Gitter um den ungefähren Mittelpunkt des Gebietes konstruiert wird. Im 2D – Fall ist dies ein aus sechs gleichseitigen Dreiecken bestehendes Sechseck. Im 3D – Fall wird als reguläres Gitter ein Polyeder angesetzt, der aus 24 Tetraedern besteht. Da sich mit gleichseitigen Tetraedern keine Parkettierung des Raums erreichen läßt, wird der Tetraeder gewählt, dessen Standardabweichung der Diederwinkel zum gleichseitigen Tetraeder so gering wie möglich ist, und der gleichzeitig subdivisions – invariant ist. Letzteres gewährleistet, dass beim Unterteilen des Tetraeders durch Halbieren der Kanten die kleinen Tetraeder kongruent zum unterteilten Tetraeder sind. Anschließend werden diejenigen Elemente des Startgitters verfeinert, deren Kanten bezüglich der Dichtefunktion zu groß sind. Die Optimierung der Knotenpositionen zueinander hat das Ziel, die oben beschriebene Regularität der Elemente so weit als möglich einzuhalten. Bei der abschließenden Triangulierung wird die Konformität der Elemente mit den Randkurven und –flächen sichergestellt. Die so erzeugten Netze zeigen bei Vorgabe beliebiger innerer Ränder (Klüfte) hohe kombinatorische und geometrische Qualität. Eine ausführliche Beschreibung des Netzgenerators *ART* findet sich in Fuchs (1999)[9].
Um die Reihe möglicher Anwendungsgebiete noch zu erweitern, wurden für den Netzgenerator *ART* zwei Schnittstellen implementiert. Die erste, *FRAC2D3D*, löst aus den Netzen

dreidimensionaler Gebiete die 2D – Elemente der Klüfte heraus, so dass eine Berechnung reiner 2D – Kluftnetzwerke im dreidimensionalen Raum möglich ist (NEUNHÄUSERER[19]). Die zweite und im vorliegenden Kontext verwendete, *FRACMESH*, schneidet niederdimensionale Klüfte auf und vernetzt sie mit Elementen von gleicher Dimension wie die umliegenden Matrixelemente. *FRACMESH* verarbeitet bisher zweidimensionale Gebiete. Die Klüfte werden mit Vierecken über die gesamte Kluftbreite vernetzt, Kluftkreuzungen werden mit Dreiecken realisiert (Abb. 1).

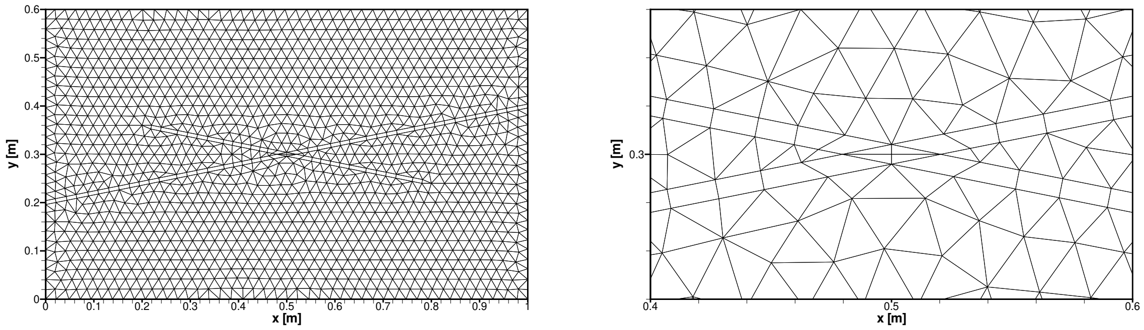

Abbildung 1: Links: Gebiet mit zweidimensional vernetzten Klüften. Rechts: Ausschnitt der Kluftkreuzung

Software – Toolbox UG Die programmtechnische Umsetzung der verwendeten Diskretisierungen und des Mehrgitterverfahrens wurde auf der Basis des Programmsystems *UG (Unstructured Grids)* durchgeführt. Die Software – Toolbox *UG* wird von der Technical Simulation Group am IWR (Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen) der Universität Heidelberg entwickelt und gepflegt. Eine Beschreibung der Struktur und der Philosophie von *UG* mit all seinen Aspekten ist in BASTIAN ET AL.[4] nachzulesen.
UG ist ein umfangreiches Softwaresystem, das eine Reihe effizienter Techniken für die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen bereitstellt. Spezielles Gewicht wird dabei auf adaptive Netzverfeinerung, robuste Mehrgittermethoden und Parallelisierungstechniken für unstrukturierte Gitter gelegt. Im einzelnen läßt sich das in weiten Teilen modular aufgebaute Programmsystem in drei große Teile gliedern:

- UG Library
- Problem Class Libraries
- Applications

Die *UG Library* enthält die geometrischen und algebraischen Datenstrukturen, eine große Anzahl an Netzverfeinerungs– /vergröberungstechniken, numerischen Algorithmen und Visualisierungstechniken sowie eine Benutzerschnittstelle. Die Benutzerschnittstelle bietet dem Nutzer eine Scriptsprache an, mit der er komplexe Rechenläufe steuern und kontrollieren kann. Gleichzeitig kann eine beliebige Anzahl von Fenstern auf dem Bildschirm geöffnet werden, in denen die aktuellen Simulationsergebnisse mit Hilfe verschiedener Visualisierungstechniken wie Netzdarstellung, Konturdarstellung, Farbverläufen oder Vektorfelddarstellungen angezeigt werden. Ebenso ist die Ausgabe der Ergebnisse in Postscript – Dateien oder im Binaärformat möglich. Der numerische Part der *UG Library* umfaßt eine Reihe unterschiedlicher Komponenten für numerische Operationen. Dazu gehören einfache Matrix– /Vektoroperationen wie skalieren, kopieren, zu Null setzen etc., weiterhin Gittertransferoperationen,

verschiedene Glätter wie z.B. Jacobi, Gauß – Seidel oder ILU – Zerlegung, Löser wie Conjugate – Gradient – oder Mehrgitterlöser sowie Werkzeuge für die Diskretisierung, die z.B. Berechnungen für Finite Volumen und Finite Elemente (Gradienten, Jacobi – Matrizen, Determinanten etc.) oder Quadraturregeln umfassen. Der Kern von *UG* ist die Datenstruktur für unstrukturierte Gitter, die die Verwendung von Netzen aus beliebigen Elementen im zwei– und dreidimensionalen Raum erlaubt. Der Grid Manager, dem diese Datenstruktur untergeordnet ist, stellt auch Funktionalitäten für die Verfeinerung und Vergröberung sowie Standardformfunktionen für verschiedene Elementtypen zur Verfügung. Die Durchführung von Simulationsläufen auf Parallelrechnern vom MIMD – Typ wird unterstützt.
Die *Problem Class Libraries* umfassen die numerische Diskretisierung und Fehlerschätzer. Der Aufbau ist modular und kann problemlos um eigene Diskretisierungsverfahren erweitert werden, wobei für viele Operationen und Funktionalitäten auf die *UG Library* zurückgegriffen werden kann.
In den *Applications* werden schließlich die Anwendungen vorgehalten, die die Gebietsbeschreibung, die Randbedingungen sowie alle erforderlichen Koeffizientenfunktionen umfassen. Typischerweise wird ein Rechenlauf über ein Skriptfile mit der zuvor angesprochenen Scriptsprache gesteuert.
Um die mit *ART* und *FRACMESH* erzeugten Netze nutzen zu können, wurde *UG* entsprechend erweitert, so daß eine Einbindung nun problemlos möglich ist. Neue Datenstrukturen zur Verwaltung von hierarchischen Formfunktionen für Vier – und Dreieckselemente erlauben die Implementierung von hierarchischen Zerlegungen in Kluft – und Matrixproblem.

4 Diskretisierungsverfahren

Strömung: Ritz – Galerkin Finite – Elemente
Wir betrachten die Strömung in der Druckformulierung (3). Im Falle einer stationären Strömung gilt

$$p_t = 0. \tag{5}$$

Der Einfachheit halber gehen wir an dieser Stelle von homogenen Dirichlet – Randbedingungen aus:

$$p(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{6}$$

Durch Multiplikation der Differentialgleichung mit einem beliebigen v aus dem Lösungsraum $V = \{v \in H^1(\Omega) | v(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega\}$, Integration über Ω und Anwendung der Greenschen Formel erhalten wir die schwache Formulierung der Diffentialgleichung:

$$p \in V: \qquad a(p,v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V, \tag{7}$$

wobei

$$a(p,v) := \int_\Omega \nabla p^{\mathrm{T}} K \nabla v \, dx \quad \text{und} \quad \ell(v) := g \int_\Omega (f + \rho \nabla \cdot (K \nabla z)) v \, dx \tag{8}$$

gesetzt ist. Ist K gleichmäßig in $x \in \Omega$ positiv definit, so existiert eine eindeutig bestimmte schwache Lösung p der Differentialgleichung (3). Unter geeigneten Glattheitsbedingungen an die Daten (vgl. z.B. Jost[13] oder Braess[7]) ist p auch klassische Lösung.
Zur numerischen Approximation von (7) wählen wir einen endlichdimensionalen Unterraum $\mathcal{S}_h \subset V$. Dabei ist h ein Diskretisierungsparameter und für $h \to 0$ soll $\mathcal{S}_h$ den kontinuierlichen Lösungsraum V approximieren. Das entsprechende Ritz – Galerkin – Verfahren lautet dann

$$p_h \in \mathcal{S}_h: \qquad a(p_h, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in \mathcal{S}_h. \tag{9}$$

Sei $\{\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_N\}$ eine Basis von $\mathcal{S}_h$. Der Ansatz

$$p_h = \sum_{k=1}^{N} P_k \Psi_k \tag{10}$$

führt auf das zu lösende Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{N} a(\Psi_k, \Psi_i) P_k = \ell(\Psi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

das wir mit $A_{ik} := a(\Psi_k, \Psi_i)$ und $b_i := \ell(\Psi_i)$ in Matrix – Vektor – Form

$$AP = b \tag{12}$$

schreiben können.
Im Sinne einer einfachen Darstellung beschreiben wir im folgenden nur den eindimensionalen Fall $\Omega = (-1, 1)$. Eine Kluft mit Weite ε ist dann durch das Intervall $(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \Omega$ repräsentiert. Die folgenden Überlegungen lassen sich direkt auf zwei und drei Raumdimensionen übertragen.
Sei

$$\mathcal{N}_h^{\varepsilon} = \{x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega$$

eine Menge von Gitterpunkte mit der Eigenschaft $x_i < x_{i+1}$. Sowohl Rechengebiet als auch Kluft sollen durch $\mathcal{N}_h^{\varepsilon}$ aufgelöst werden, also

$$x_n = -1, \quad x_{-1} = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad x_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \quad x_n = 1.$$

Durch $\mathcal{N}_h^{\varepsilon}$ wird Ω in $2n$ Teilintervalle t_k zerlegt. Wir wählen nun

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_h^{\varepsilon} := \left\{ v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_{t_k} \text{ ist linear und } v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{13}$$

Die unbekannten Koeffizienten P_k in (11) sind dann gerade die Werte von p_h in den Knoten $x_k \in \mathcal{N}_h^{\varepsilon}$. Das vorgestellte Ritz – Galerkin – Finite – Elemente – Verfahren wird später verwendet, um das Mehrgitterverfahren zur entkoppelten Betrachtung von Kluft– und Matrixraum mit Elementen gleicher Dimension zu beschreiben (Kap. 5).
Das FE – Verfahren approximiert die Geschwindigkeit eine Ordnung niedriger als den Druck bzw. die Piezometerhöhe. Da die Geschwindigkeitsverteilung jedoch ein sehr sensitiver Parameter für die Transportberechnung ist, soll im nächsten Schritt ein gemischt – hybrides Finite – Elemente – Verfahren verwendet werden, das die Geschwindigkeit sogar besser als den Druck beschreibt.

Transport: Streamline – Upwind Boxverfahren
Zur Lösung der Transportgleichung (4) wird ein modifiziertes Boxverfahren eingesetzt, das *Streamline – Upwind Boxverfahren*. Ein Boxverfahren beruht zunächst auf einer knotenzentrieren Finite – Volumen – Betrachtung und hat den Vorteil, daß es auf beliebigen unstrukturierten Gittern eingesetzt werden kann. Dazu wird jedes Element in knotenbezogene Subkontrollvolumen unterteilt, die durch jeweils einen zugehörigen Elementknoten, die Seitenmittelpunkte der Elementkanten und den Elementschwerpunkt definiert werden (Abb. 2, links). Der Fluß senkrecht zu den Rändern der Box wird an den Integrationspunkten mit einer Einpunktintegration über das Interface der zugehörigen Subkontrollvolumen bestimmt (Abb. 2, mitte).

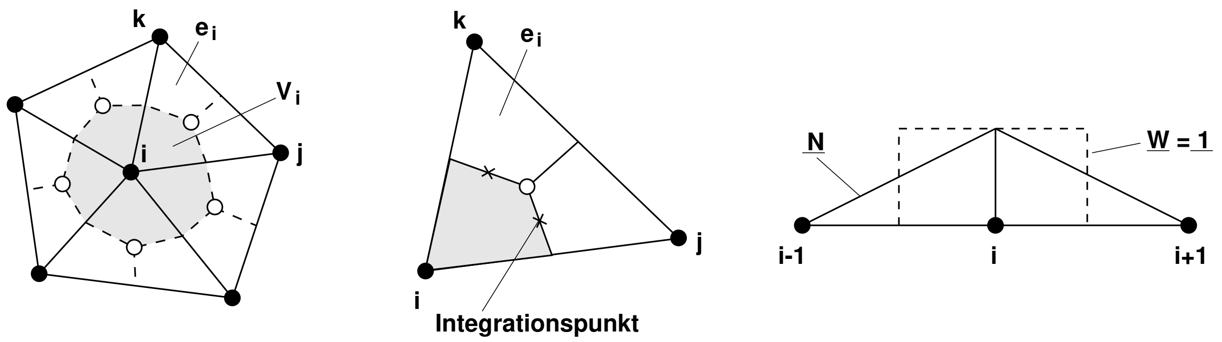

Abbildung 2: Patch am Knoten i mit Box V_i, Integrationspunkte, Ansatz – und Wichtungsfunktion

Im Kontext einer Galerkin – Finite – Elemente – Herleitung auf der Grundlage der gewichteten Residuen

$$\int_V \underline{W} \cdot \epsilon \, dG = 0 \quad \text{mit} \quad \epsilon = \mathcal{D}(\tilde{c}) \quad \text{und} \quad \tilde{c} = \underline{N} \cdot \underline{\hat{c}} \tag{14}$$

entspricht dies einer Formulierung mit den Wichtungsfunktionen (Abb. 2, rechts)

$$\underline{W} = \begin{cases} 1 \;\, if \;\, x \in V_i \\ 0 \;\, if \;\, x \notin V_i \end{cases} . \tag{15}$$

Daraus ergibt sich als Diskretisierung für die Transportgleichung (4):

$$\underline{\hat{c}}_t \cdot \int_V \underline{W}\, \underline{N} \, dV = - \oint_\Gamma \underline{W}\, \underline{v}_a \, \underline{N}\, \underline{n} \, d\Gamma \, \underline{\hat{c}} + \oint_\Gamma \underline{W}\, \underline{\underline{D}} \, \nabla \, \underline{N}\, \underline{n} \, d\Gamma \, \underline{\hat{c}} \tag{16}$$

mit Normalenvektor $\underline{n}$ senkrecht auf dem Rand Γ und dem Vektor der diskreten Knotenwerte $\underline{\hat{c}}$.

Zur Bestimmung der Näherungslösung $\tilde{c} = \underline{N} \cdot \underline{\hat{c}}$ werden für den Akkumulations– und den Diffusionsterm lineare Ansatzfunktionen $\underline{N}$ gewählt. Der Advektionsterm wird oberstrom gewichtet, d.h. es wird der Konzentrationswert des in Bezug auf den Fluß am Integrationspunkt oberstromigen Knotens für die Diskretisierung verwendet (*fully upwinding*), im Fall von Abb. 3 links der Knoten i. Das Upwinding ist nur von erster Ordnung genau, aber physikalisch sinnvoll, da der Informationsfluß beim advektiven Transport von ober– nach unterstrom gerichtet ist. Das so beschriebene Verfahren ist monoton und lokal massenkonservativ (vgl. z.B. HELMIG[11]).

Die durch das Upwinding eingebrachte künstliche Diffusion stabilisiert die Lösung advektiv dominierter Prozesse, da sie Fehler höherer Ordnung im besten Fall ausgleicht (vgl. z.B. CIRPKA[8]). Dies ist jedoch nur in Richtung des advektiven Massenflusses und damit der Stromlinien notwendig. Bei mehrdimensionalen Problemen tritt durch das Upwinding entlang der Elementkanten auch eine künstliche Diffusion quer zur Strömungsrichtung auf (Querdiffusion oder *crosswind diffusion*), die nicht erwünscht ist. Um diese zu minimieren, wird das Upwinding für das Boxverfahren entlang der Stromlinien durchgeführt (Abb. 3).

In Anlehnung an ein *upwind scheme* erster Ordnung nach RAITHBY[21] wird der zu verwendende oberstromige Konzentrationswert c_{up} linear zwischen i und k interpoliert:

$$c_{up} = (1 - \beta) c_i + \beta c_k \quad \text{mit} \quad \beta = min(1, \alpha) \tag{17}$$

α stellt das Verhältnis des Abstandes zwischen Knoten i und Schnittpunkt $s1$ bzw. $s2$ zur Seitenlänge L dar. Wichtig ist, daß $s1$ nicht zwischen den Knoten i und j interpoliert wird. In diesem Fall würde es sich nicht mehr um eine Oberstromwichtung handeln. Das *Streamline* –

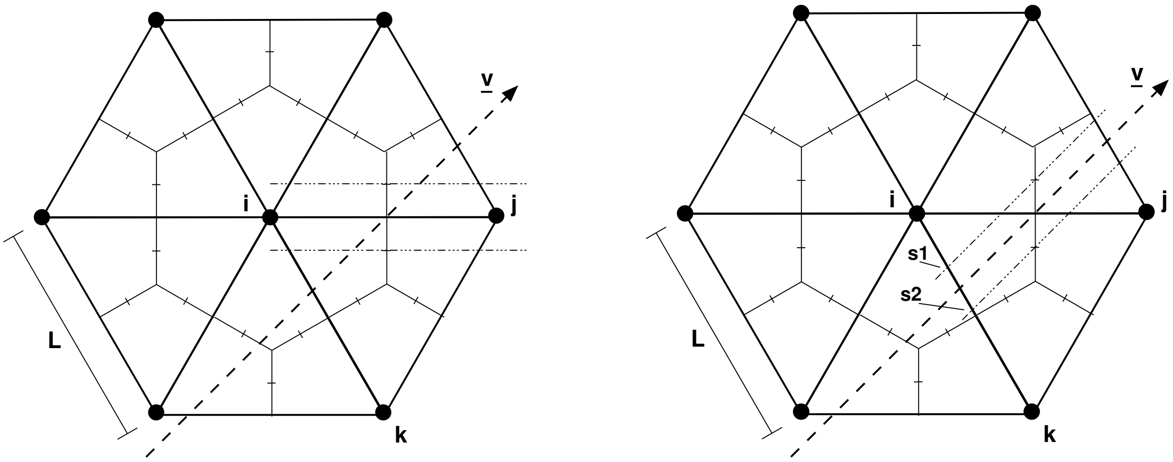

Abbildung 3: Patch am Knoten i mit Box. Links: Upwinding entlang der Elementkante. Rechts: Streamline Upwinding

Upwind Boxverfahren ermittelt für ein kartesisches Quadratgitter mit $Cr = (v_a \Delta t)/\Delta x = 1$ die exakte Lösung nicht nur bei Strömung entlang der Elementkanten, sondern auch unter 45^o. Unter den gleichen Voraussetzungen wird auch die exakte Lösung für ein regelmäßiges Dreiecksgitter (Abb. 3) bestimmt, wenn die Stromlinie parallel zu einer Kante verläuft. In beiden Fällen erzeugt ein Upwinding entlang der Elementkanten ein deutliches Maß an künstlicher Diffusion (Abb. 8).
Das *streamline upwinding* bietet neben der Verringerung der Querdiffusion eine Reihe weiterer Möglichkeiten, die im nächsten Schritt realisiert werden sollen. So läßt sich das Upwinding entlang der Stromlinie in Abhängigkeit vom Verhältnis von Advektion und Diffusion durchführen und so das notwendige Maß an künstlicher Längsdiffusion besser bestimmen. Weiterhin sollen *slope limiter* mit *TVD – Eigenschaften* in Bereichen hoher Konzentrationsgradienten eingesetzt werden, die eine schärfere Front ermöglichen.

5 Hierarchische Zerlegung und Mehrgitterverfahren

Wir betrachten das aus der Strömungsgleichung (3) entstehende Problem in der schwachen Formulierung (7) und eine Diskretisierung (9) mit linearen Finiten Elementen (13) .
Ausgehend von dem in Abbildung 4 dargestellten Gitter $\mathcal{N}_0^\varepsilon$ erzeugen wir durch sukzessive Bisektion eine Gitterfolge $\mathcal{N}_0^\varepsilon \subset \mathcal{N}_1^\varepsilon \subset \cdots \subset \mathcal{N}_j^\varepsilon$. Die entsprechende Folge von FE – Räumen

$$\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset \mathcal{S}_1^\varepsilon \subset \cdots \subset \mathcal{S}_j^\varepsilon$$

ist Ausgangspunkt für die Konstruktion von Mehrgittermethoden zur Lösung des diskreten Problems

$$p_j \in \mathcal{S}_j^\varepsilon : \qquad a(p_j, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in \mathcal{S}_j^\varepsilon. \tag{18}$$

Klassische Mehrgittermethoden (z.B. mit kanonischer Galerkinrestriktion – und Prolongation sowie Gauß – Seidel – Glättung) versagen für verschwindende Kluftweite, also $\varepsilon \to 0$.
Als Ausweg wurden algebraische Mehrgittermethoden (vgl. Braess[6]) oder eine Verbindung von Homogenisierung und Mehrgitter (vgl. Neuss[20]) vorgeschlagen. Wir wollen hier einen neuen Ansatz vorstellen, der auf einer hierarchischen Zerlegung von (18) in eine Folge von Kluft – und Matrixproblemen sowie einem für $\varepsilon \to 0$ robusten Mehrgitterverfahren für das Matrixproblem beruht.

Hierarchische Zerlegung Eine hierarchische Zerlegung (siehe YSERENTANT[25] und BANK ET AL.[2]) ist ein Spezialfall einer Teilraumkorrekturmethode (XU[24], YSERENTANT[26]), deren Idee es ist, das Ausgangsproblem in eine Folge kleinerer Probleme zu zerlegen.
Wir betrachten die hierarchische Zerlegung

$$\mathcal{S}_j^\varepsilon = \mathcal{S}_j^M \oplus \mathcal{S}_j^K \tag{19}$$

in einen Matrixraum $\mathcal{S}_j^M$ und in einen Kluftraum $\mathcal{S}_j^K$. Der eindimensionale Kluftraum $\mathcal{S}_j^K$ wird durch die Knotenbasisfunktion $\lambda_{0,j}$ zum Knoten x_0 aufgespannt, der Matrixraum $\mathcal{S}_j^M$ durch die Knotenbasisfunktionen zum Matrixgitter $\mathcal{N}_j^M = \mathcal{N}_j^\varepsilon \setminus \{x_0\}$ (vgl. Abbildung 4).

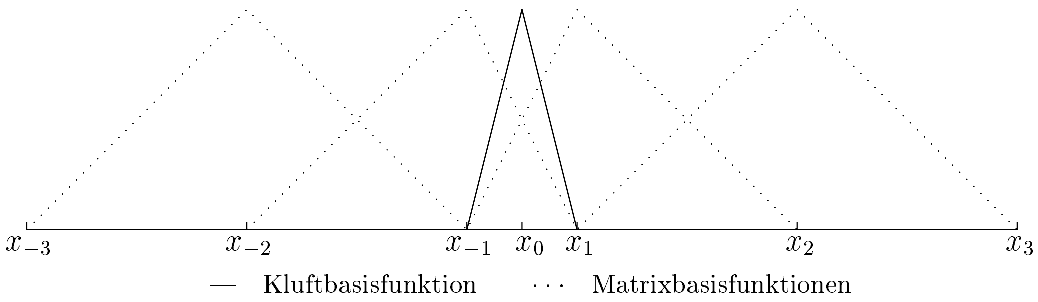

Abbildung 4: Hierarchische Zerlegung

Die Teilraumzerlegung (19) führt auf eine entsprechende Zerlegung des Ausgangsproblems in zwei Teilprobleme und damit auf das folgende iterative Verfahren.

Algorithmus (Zweilevelverfahren)

gegeben: $p_j^\nu \in \mathcal{S}_j^\varepsilon$
löse:

$$v_j^M \in \mathcal{S}_j^M : \quad a(v_j^M, v) = \ell(v) - a(p_j^\nu, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}_j^M \tag{20}$$

löse:

$$v_j^K \in \mathcal{S}^K : \quad a(v_j^K, v) = \ell(v) - a(p_j^\nu + v_j^M, v) \quad \forall v \in \mathcal{S}^K \tag{21}$$

neue Iterierte: $p_j^{\nu+1} = p_j^\nu + v_j^M + v_j^K$

Diese Zerlegung erlaubt eine entkoppelte Betrachtung von Kluft – und Matrixproblem und damit auch die Verwendung von geeigneten Lösungsverfahren für die einzelnen Probleme. Dabei erinnert das Matrixproblem an einen äquivalenten Ansatz, bei dem durch Änderung des Beobachtungsmaßstabes eine Homogenisierung vorgenommen und die Klüftung nicht explizit behandelt wird. Das Kluftproblem spielt die Rolle eines Einzelkluft –bzw. Kluftnetzwerkmodells, in dem die Matrix als undurchlässig angenommen wird.
Man beachte, daß das Matrixproblem (20) nach Konstruktion keine Freiheitsgrade im Innern der Kluft hat. Die Interaktion zwischen Kluft – und Matrixproblem findet dann nur noch durch die Nebendiagonaleinträge der Gesamtsteifigkeitsmatrix A in (12) im Update des Residuums im (hierarchischen) Zweilevelverfahren statt und läßt sich mit einer einfachen Matrix – Vektor – Multiplikation realisieren.

Kluftproblem Im räumlich eindimensionalen Fall ist die Lösung des Kluftproblems trivial (eine lineare Gleichung). Auch im Fall zwei – oder dreidimensionaler Rechengebiete Ω kann man davon ausgehen, daß die Anzahl der Unbekannten in den Klüften im Verhältnis zum Gesamtrechengebiet von niederer Ordnung ist. Damit liegt die Verwendung eines direkten Lösers nahe. In komplexeren Fällen wie z.B. grössere Kluftnetzwerke kann ein Mehrgitterverfahren für anisotrope Gitter (Apel und Schöberl[1]) verwendet werden.

Matrixproblem Zur iterativen Lösung des Matrixproblems soll nun ein geeignetes Mehrgitterverfahren bereitgestellt werden. Grundlage ist die Gitterhierarchie

$$\mathcal{N}_0^M \subset \mathcal{N}_1^M \subset \cdots \subset \mathcal{N}_j^M, \qquad \mathcal{N}_k^M = \mathcal{N}_k^\varepsilon \setminus \{x_0\}$$

und die entsprechende Hierarchie von FE – Räumen

$$\mathcal{S}_0^M \subset \mathcal{S}_1^M \subset \cdots \subset \mathcal{S}_j^M.$$

Wir betrachten zunächst das (klassische) Mehrgitterverfahren mit kanonischer Restriktion und Prolongation sowie Gauß – Seidel – Glätter. Als Grobgitterkorrektur im Knoten $x_{-1} = -\frac{\varepsilon}{2} \in \mathcal{N}_k^M$ (linker Kluftrand) auf Level k erhält man

$$z_{-1,k} = \frac{f(\lambda_{-1,k}) - a(w, \lambda_{-1,k})}{a(\lambda_{-1,k}, \lambda_{-1,k})} \tag{22}$$

Dabei ist $\lambda_{-1,k} \subset \mathcal{S}_k^M$ die Knotenbasisfunktion zu x_{-1} auf Level k und $w \in \mathcal{S}_j^M$ eine beliebige Zwischeniterierte. Im Falle $\varepsilon \to 0$ gilt

$$\|\lambda_{-1,k}\| = a(\lambda_{-1,k}, \lambda_{-1,k})^{1/2} \to 0$$

und daher auch $z_{-1,k} \to 0$. Mit verschwindender Kluftweite verschwinden somit auch die Grobgitterkorrekturen am Kluftrand und die Konvergenzgeschwindigkeit nimmt dramatisch ab. Diese Eigenschaft ist typisch für klassische Mehrgitterverfahren.

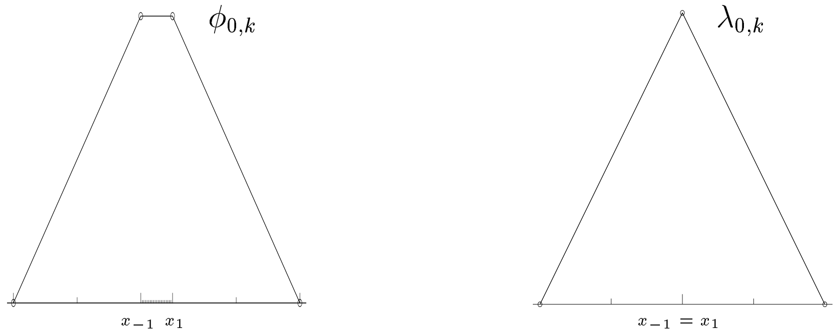

Abbildung 5: Grobgittersuchrichtung / zusätzlicher Glättungsschritt

Um auch für $\varepsilon \to 0$ ein robustes Konvergenzverhalten zu erreichen, wird am Kluftrand eine zusätzliche, geometriangepaßte Korrektur

$$z_{0,k} = \frac{f(\phi_{0,k}) - a(w, \phi_{0,k})}{a(\phi_{0,k}, \phi_{0,k})} \tag{23}$$

in Richtung

$$\phi_{0,k} = \lambda_{-1,k} + \lambda_{1,k}$$

durchgeführt. Beachte, daß $\phi_{0,k}$ für $\varepsilon \to 0$ gegen die Grobgitterknotenbasisfunktion $\lambda_{0,k}$ konvergiert (vgl. Abbildung 5). Die Korrekturen $z_{0,k}$ sind für $\lambda_{0,k}$ anstelle von $\phi_{0,k}$ und damit selbst für $\varepsilon = 0$ sinnvoll.

6 Vorläufige Ergebnisse

Hierarchische Zerlegung
Wir betrachten das Modellproblem

$$\begin{aligned} -\Delta p(x) &= f(x) \quad \text{für} \quad x \in \Omega \\ p &= 0 \qquad\; \text{für} \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{24}$$

Abbildung (6) zeigt das Rechengebiet Ω zusammen mit der Ausgangszerlegung $\mathcal{T}_0$ in Drei – und Vierecke. Die Vierecke sollen eine Kluft mit horizontaler Kluftweite ε repräsentieren. Durch sukzessive Halbierung aller Kanten in der Matrix (uniforme Verfeinerung der Dreiecke) und Halbierung der senkrechten Kanten in der Kluft (anisotrope Verfeinerung der Vierecke) erhalten wir eine Folge geschachtelter Zerlegungen $\mathcal{T}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{T}_j$. Stückweise lineare Finite Elemente in der Matrix und bilineare Elemente in der Kluft führen auf eine entsprechende Folge von FE – Räumen $\mathcal{S}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_j$.

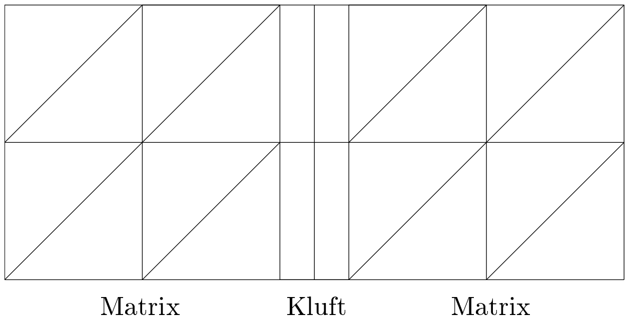

Abbildung 6: Trianguliertes Gebiet mit einer senkrechten Kluft

Abbildung 7 zeigt links für $j = 3$ (595 Unbekannte) die Konvergenzraten zweier Mehrgitterverfahren in Abhängigkeit von der Kluftweite ε. Trotz verhältnismäßig kleiner Anzahl von Unbekannten ist das klassische Mehrgitterverfahrens mit kanonischer Restriktion und Prolongation sowie Gauß – Seidel – Glätter (gepunktete Linie) für Kluftweite $\varepsilon < 10^{-5}$ unbrauchbar. Im Gegensatz dazu ist unser neues Verfahren mit geometrieangepasster Glättung (gestrichelte Linie) robust gegenüber verschwindender Kluftweite. Rechts ist das Verhalten der Konvergenzrate für festes $\varepsilon = 10^{-4}$ und variables $j = 1, \ldots, 5$ zu sehen. Wir beobachten eine Absättigung der Konvergenzraten im Bereich von 0.1, also gitterunabhängige Konvergenzraten.

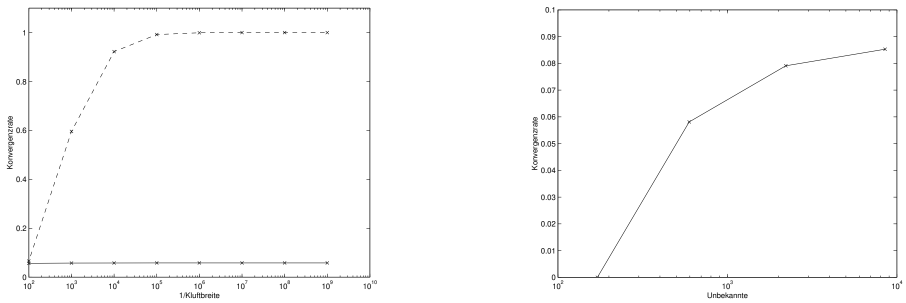

Abbildung 7: Robuste Konvergenzraten für kleine ε und h

Transport
Die Eigenschaften des in Kapitel 4 vorgestellen Streamline – Upwind Boxverfahrens sollen an einem einfachen Beispiel demonstriert werden. Abb. 8 links zeigt die Piezometerhöhenverteilung und das zugehörige Strömungsfeld für ein quadratisches Gebiet mit einer Quelle an der unteren linken Ecke und einer Senke an der rechten oberen Ecke. Quelle und Senke sind durch Dirchlet – Randbedingungen realisiert, der Fluß über die Ränder ist Null. An der unteren linken Ecke wird eine Einheitskonzentration vorgegeben.

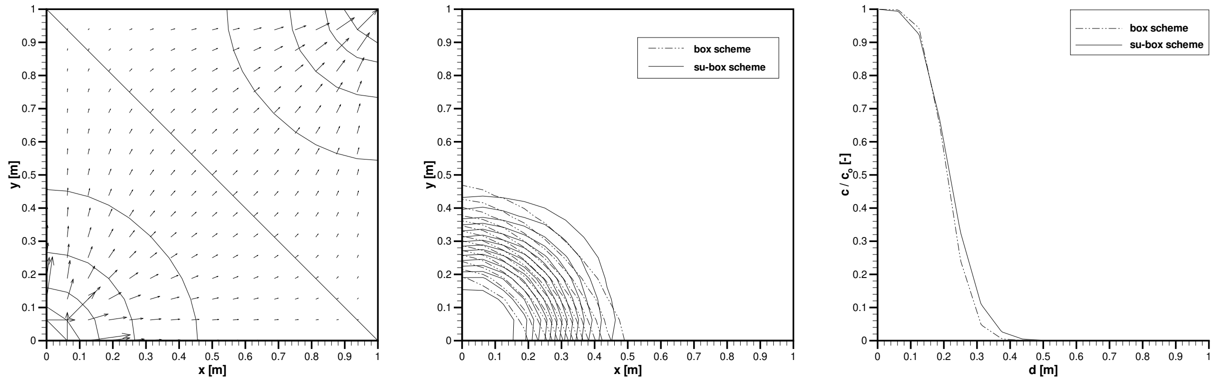

Abbildung 8: Strömungsfeld, Konzentrationsverteilung mit Box und SU – Box, Schnitt entlang der Diagonale

Die Konzentration wandert mit der Strömung in das Gebiet ein. Beim Boxverfahren ohne Oberstromwichtung liegt die Front entlang der Hauptachsen am Gebietsrand vor der Lösung mit *streamline upwinding*, entlang der Diagonalen ist es umgekehrt. Diese Deformation der Kurve ist auf Querdiffusion zurückzuführen (Abb. 8 mitte und rechts).

7 Zusammenfassung

Im Gegensatz zu bisherigen Ansätzen soll die lokale Flußerhaltung am Kluft/Matrix – Übergang gewährleistet werden. Dazu sollen Kluft und Matrix mit Elementen gleicher Dimension vernetzt werden, unterschiedliche Diskretisierungsverfahren in Kluft und Matrix möglich sein, um den unterschiedlichen Prozessen Rechnung zu tragen, und alle Bausteine des Lösungsprozesses robust gegenüber verschwindender Kluftweite sein.
Auf der Grundlage des Netzgenerators ART wurde zunächst in 2 – D die Schnittstelle FRACMESH entwickelt, um die Klüfte mit Elementen gleicher Dimension zu vernetzen wie die umliegenden Matrixelemente. Auf diese Weise können die Nachteile der bisher verwendeten Kopplung von Elementen unterschiedlicher Dimension (keine Flußerhaltung am Kluft/Matrix – Übergang) vermieden werden.
Zur Diskretisierung der Strömungsgleichung wurde bisher ein Ritz – Galerkin Finite – Elemente – Verfahren verwendet. Zur besseren Approximation der Geschwindigkeitsverteilung soll im weiteren Verlauf der Arbeiten ein gemischt – hybrides Finite – Elemente – Verfahren eingesetzt werden. Es konnte gezeigt werden, daß das für die Transportberechnung entwickelte Streamline – Upwind Boxverfahren die durch die Diskretisierung hervorgerufene künstliche Querdiffusion gering halten kann. Die Stromlinienformulierung bietet eine Reihe von Möglichkeiten, von denen als nächstes die Anpassung an das Verhältnis von Advektion zu Diffusion und die Einbeziehung von *slope – limiter* – Techniken im Bereich steiler Gradienten (adaptive Diskretisierung) ins Auge gefaßt wird.
Um die Verwendung von unterschiedlichen Diskretisierungsverfahren in Kluft und Matrix

zu ermöglichen, haben wir ein Mehrgitterverfahren entwickelt, das mit einem hierarchischen Ansatz eine Zerlegung in Kluft– und Matrixproblem erlaubt. Dieses wurde zunächst für die Strömung implementiert und soll im nächsten Schritt auf den Transport übertragen werden. Bei der herkömmlichen hierarchischen Zerlegung treten Konvergenzprobleme im Matrixraum durch einseitig zu steile Basisfunktionen bei verschwindender Kluftweite auf. Es wurden problemangepaßte Glättungsschritte vorgestellt, mit denen auch im Matrixproblem in ersten Modellbeispielen kluftbreitenunabhängige Konvergenz erreicht werden konnte.

Danksagung: Das Projekt "Mehrgittermethoden und adaptive Diskretisierungsverfahren zur Simulation von Strömungs – und Transportprozessen in Kluftaquiferen" wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft mit den Sachbeihilfen Hi 640/1 – 1 und Ko 1806/2 – 1 unterstützt.

Literatur

[1] T. Apel und J. Schöberl. Multigrid methods for anisotropic edge refinement. Forschungsbericht SFB–Report No.00–19, Universität Linz, SFB F013 Numerical and Symbolic Scientific Computing, Juli 2000.

[2] R.E. Bank, T.F. Dupont, und H. Yserentant. The hierarchical basis multigrid method. *Numerische Mathematik*, 52:427–458, 1988.

[3] C. Barlag. Adaptive Methoden zur Modellierung von Stofftransport im Kluftgestein. Bericht Nr. 52, Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, Universität Hannover, 1997.

[4] P. Bastian, K. Birken, K. Johannsen, S. Lang, K. Eckstein, N. Neuss, H. Rentz Reichert, und C. Wieners. UG – A Flexible Software Toolbox for Solving Partial Differential Equations. *Computing and Visualization in Science*, 1(1):27 – 40, 1997.

[5] J. Birkhölzer. Numerische Untersuchungen zur Mehrkontinuumsmodellierung von Stofftransportvorgämngen in Kluftgrundwasserleitern. Forschungsbericht, Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, Universität Hannover, 1994.

[6] D. Braess. Towards Algebraic Multigrid for Elliptic Problems of Second Order. *Computing*, 55:379 – 393, 1995.

[7] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, 1997.

[8] O. Cirpka. CONTRACT: A Numerical Tool for Contaminant Transport and Chemical Transformations. Mitteilungen Heft 87, Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau, 1996.

[9] A. Fuchs. *Optimierte Delaunay – Triangulierungen zur Vernetzung getrimmter NURBS – Körper*. Dissertation, Universität Stuttgart, Mathematisches Institut A, Shaker – Verlag, 1999.

[10] R. Helmig. Theorie und Numerik der Mehrphasenströmungen in geklüftet – porösen Medien. Bericht Nr. 34, Universität Hannover, Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, 1993.

[11] R. Helmig. *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface*. Springer – Verlag, Heidelberg, 1997.

[12] T. Himmelsbach. Untersuchungen zum Wasser – und Stofftransportverhalten von Störungszonen im Grundgebirge (Albgranit, Südschwarzwald). Schriftenreihe Angewandte Geologie Karlsruhe, 1993.

[13] J. Jost. *Partielle Differentialgleichungen*. Springer, 1998.

[14] K. P. Kröhn. *Simulation von Transportvorgängen im klüftigen Gestein mit der Methode der Finiten Elemente*. Dissertation, Universität Hannover, Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, 1991.

[15] U. Lang. *Simulation regionaler Strömungs– und Transportvorgänge in Karstaquiferen mit Hilfe des Doppelkontinuum – Ansatzes: Methodenentwicklung und Parameteridentifikation*. Dissertation, Universität Stuttgart, Germany, 1995. Mitteilungen Heft 85.

[16] P. Małoszewski und A. Zuber. Tracer Experiments in Fractured Rocks: Matrix Diffusion and the Validity of Models. *Water Resources Research*, 29(8):2723 – 2735, 1993.

[17] T.N. Narasimhan und K. Pruess. MINC: An Approach for Analyzing Transport in Strongly Heterogeneous Systems. In E. Custodio, A. Gurgui, und J.P. Lobo Ferreira, Hrsg., *Groundwater Flow and Quality Modeling*, S. 375 – 391, Dordrecht, 1988. D. Reidel Publishing Company.

[18] L. Neunhäuserer, A. Hemminger, und R. Helmig. Festgestein–Aquiferanalog: Experimente und Modellierung, Teilprojekt 3: Einsatz von diskreten Modellansätzen. Arbeitsbericht 5/96 – 10/97, DFG – Projekt Nr. He2531/1 – 1, Institut für Wasserbau, Universität Stuttgart und NMI, Technische Universität Braunschweig, 1997.

[19] L. Neunhäuserer, A. Hemminger, und R. Helmig. Festgestein–Aquiferanalog: Experimente und Modellierung, Teilprojekt 3: Einsatz von diskreten Modellansätzen. Arbeitsbericht 11/1997 – 03/2000, DFG – Projekt Nr. He2531/1 – 2, He2531/1 – 3, Institut für ComputerAnwendungen im Bauingenieurwesen, Technische Universität Braunschweig, 2000.

[20] N. Neuss. Homogenisierung und Mehrgitter. Forschungsbericht, ICA Stuttgart, 1996.

[21] G.D. Raithby. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 9:153 – 164, 1976.

[22] Y.W. Tsang, C.F. Tsang, I. Neretnieks, und L. Moreno. Flow and Transport in Fractured Media: a Variable Aperture Channel Model and its Properties. *Water Resources Research*, 24(12):2049 – 2060, 1988.

[23] J. Wollrath. Ein Strömungs- und Transportmodell für klüftiges Gestein und Untersuchungen zu homogenen Ersatzsystemen. Forschungsbericht 28, Institut für Strömungsmechanik und Elektronisches Rechnen im Bauwesen, Universität Hannover, 1990.

[24] J. Xu. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Review*, 34:581–613, 1992.

[25] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.

[26] H. Yserentant. Old and new convergence proofs for multigrid methods. *Acta Numerica*, 1993.